Prof. Dr. W. Bergweiler SS 2010

Analysis IV
Serie 2

1. Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume und sei F eine Menge von Funktionen von X nach Y, die in jedem Punkt von X gleichgradig stetig ist. Sei X kompakt. Zeigen Sie, dass F gleichgradig stetig auf X ist.

2. Seien $p, q \in \mathbb{N}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^p$ offen und F eine Menge stetig differenzierbarer Funktionen von Ω nach $\mathbb{R}^q$. Für alle $x \in \Omega$ existiere eine Umgebung U sowie $M \in \mathbb{R}$ mit

$$\|Df(x)\|_{op} \leq M$$

für alle $f \in F$ und $x \in U$. (Dabei ist $Df(x)$ die totale Ableitung von f im Punkt x und

$$\|Df(x)\|_{op} = \sup_{\|h\|=1} \|Df(x)(h)\|$$

die Operatornorm.) Zeigen Sie, dass F gleichgradig stetig in jedem Punkt von Ω ist.

3. Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y'(x) = \alpha y(x), \quad y(0) = 1,$$

wobei $\alpha > 0$. Sei y^n die Näherungslösung, die mit dem Eulerschen Polygonzug-Verfahren auf dem Intervall $[0, 1]$ durch äquidistante Zerlegung in n Teilintervalle gewonnen wird. Berechnen Sie $y_k^n = y^n\left(\dfrac{k}{n}\right)$ für $n \in \mathbb{N}$ und $0 \leq k \leq n$ und zeigen Sie direkt, dass (y^n) auf $[0, 1]$ gleichmäßig gegen die Lösung des Anfangswertproblems konvergiert.

Zeigen Sie weiter, dass eine Konstante C existiert, so dass für die Lösung y des Anfangswertproblems, $n \in \mathbb{N}$ und $x \in [0, 1]$

$$|y_n(x) - y(x)| \leq \frac{C}{n}$$

gilt.

4. Geben Sie ein Intervall an, in dem das Anfangswertproblem

$$y''(x) = y(x)^2 + x^2, \; y(0) = 0, \; y'(0) = 1$$

eine Lösung besitzt.

Die Lösungen sind bis Dienstag, den 27.04.2010, vor der Vorlesung abzugeben.