Prof. Dr. W. Bergweiler SS 2010

Analysis IV
Serie 1

1. Sei $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0,1\}$. Zeigen Sie, dass die Differentialgleichung

$$y'(x) = u(x)y(x) + v(x)y(x)^{\alpha}$$

durch die Transformation

$$z(x) = y(x)^{1-\alpha}$$

in eine lineare Differentialgleichung überführt wird.

Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$y'(x) = 2y(x) + 2x\sqrt{y(x)}, \quad y(0) = 1 \ .$$

2. Sei I kompaktes Intervall und seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig. Zeigen Sie, dass auch $f+g$ und $f \cdot g$, sowie im Falle, dass $g(x) \neq 0$ für alle $x \in I$, auch $\dfrac{f}{g}$ Lipschitz-stetig ist.

Erinnerung. f heißt Lipschitz-stetig, falls $L \geq 0$ mit $|f(x) - f(y)| \leq L|x-y|$ für alle $x, y \in I$ existiert.

3. Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von Picard-Lindelöf, dass das Anfangswertproblem

$$y'(x) = x^2 + xy(x)^2, \quad y(0) = 0$$

für $0 < \delta < \dfrac{1}{2}$ eine eindeutig bestimmte Lösung auf dem Intervall $[-\delta, \delta]$ hat.

4. Im Satz von Picard-Lindelöf wird für das Anfangswertproblem

$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad y(x_0) = y_0$$

die rekursiv durch

$$y_0(x) \equiv y_0, \quad y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_n(t))\, dt$$

definierte Funktionenfolge $(y_n)_{n\geq 0}$ betrachtet. Berechnen Sie für das Anfangswertproblem aus Aufgabe 3 die Funktionen y_1, y_2 und y_3

Die Lösungen sind bis Dienstag, den 20.04.2010, vor der Vorlesung abzugeben.