Übungen zu
Analysis III
Serie 8

1. Geben Sie explizite Parametrisierungen zweier Flächenstücke M_1 und M_2, so dass $M_1 \cap M_2 = \partial M_1 \cap \partial M_2$ gilt und $M_1 \cap M_2$ aus zwei glatten Kurvenstücken besteht, aber $M_1 \cup M_2$ keine orientierbare Fläche ist.

2. Sei $M \subset \mathbb{R}^3$ das Dreieck mit den Ecken $P_1 = (1,0,0)$, $P_2 = (0,2,0)$ und $P_3 = (0,0,2)$. Sei $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,
$$v(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2 & - & 2yz \\ xz & - & yz \\ xy & - & y^2 \end{pmatrix}.$$
Berechnen Sie $\int\limits_{\partial M} v(x) \cdot dx$ einmal direkt und einmal mit Hilfe des Satzes von Stokes. Dabei sei ∂M so orientiert, dass die Eckpunkte in der Reihenfolge P_1, P_2, P_3 durchlaufen werden.

3. Sei $Z = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq R^2, 0 \leq z \leq h\}$, mit $R, h > 0$. Sei $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,
$$v(x,y,z) = \begin{pmatrix} 4x \\ -2y^2 \\ z^2 \end{pmatrix}.$$
Berechnen Sie $\int\limits_{\partial Z} v(x) \cdot d\underline{o}(x)$, wobei der Normalenvektor nach außen weise, einmal direkt und einmal mit Hilfe des Satzes von Gauß.

4. Sei $V \subset \mathbb{R}^3$ Normalbereich, dessen Rand aus endlich vielen glatten Flächenstücken besteht. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ offen mit $V \subset \Omega$ und sei $u \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$ mit $u(x) = 0$ für alle $x \in \partial V$. Weiterhin genüge u der Differentialgleichung $\triangle u + \lambda u = 0$, wobei $\lambda \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $\lambda > 0$ gilt.

Abgabe: Mi, 17.12.03 bzw. Do, 18.12.03 in den Übungen.