Übungen zu Analysis III

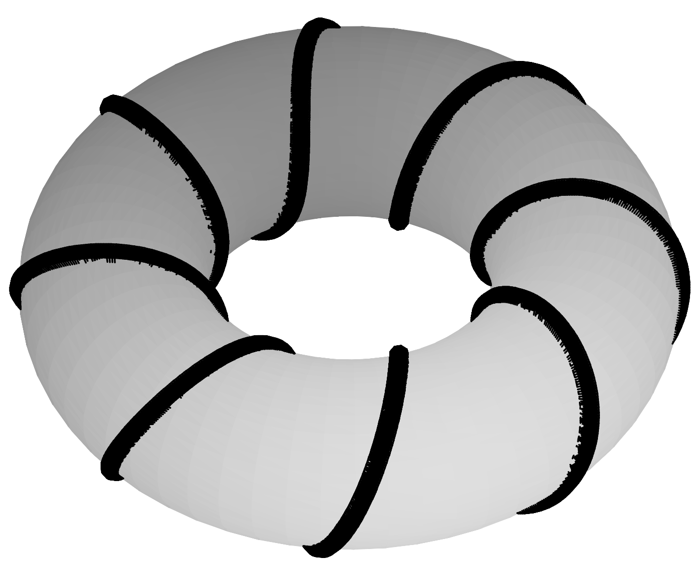
Serie 5

1. Sei
$$\gamma : \; [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2 \; , \quad \gamma(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t).$$
Berechnen Sie $L(\gamma)$.

2. Sei
$$\gamma : [0, 2\pi] \; \to \; \mathbb{R}^3 \; , \quad \gamma(t) = (r\cos t, r\sin t, ht),$$
wobei $r, h > 0$. Sei
$$f : \mathbb{R}^3 \backslash \{0\} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x}{||x||}.$$
Berechnen Sie $\int\limits_\gamma f(x) \cdot dx$ und $\int\limits_\gamma ||f(x)|| ds$.

3. Die (glatte) Kurve $\sigma : [0, L] \to \mathbb{R}^n$ sei durch die Bogenlänge parametrisiert, d.h. $||\sigma'(s)|| = 1$ für alle $s \in [0, L]$. Es sei σ zweimal stetig differenzierbar. Ist für ein $s \in [0, L]$ dann $\sigma''(s) \neq 0$, so heißt $\frac{\sigma''(s)}{||\sigma''(s)||}$ *Hauptnormalenvektor* und $r(s) := \frac{1}{||\sigma''(s)||}$ *Krümmungsradius.* Zeigen Sie, dass $< \sigma'(s), \sigma''(s) >= 0$ gilt, d.h. der Hauptnormalenvektor steht senkrecht zum Tangentenvektor $\sigma'(s)$. Zeigen Sie weiter, dass ein Kreis mit Radius r Krümmungsradius r hat.

4. Sei $K = \{(x, y, z) : \; (\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2 + z^2 \leq r^2\}$ der Adventskranz („Torus“) aus Serie 3, Aufgabe 2. Dieser soll mit einem Band n-mal gemäß Abbildung (dort is $n = 8$) umwickelt werden. Zeigen Sie, dass für die Länge L des Bandes gilt:
$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 \cos^2 t + 2Rr\cos t + R^2 + r^2 n^2} \; dt.$$



Abgabe: Mi, 19.11.03 bzw. Do, 20.11.03 in den Übungen.