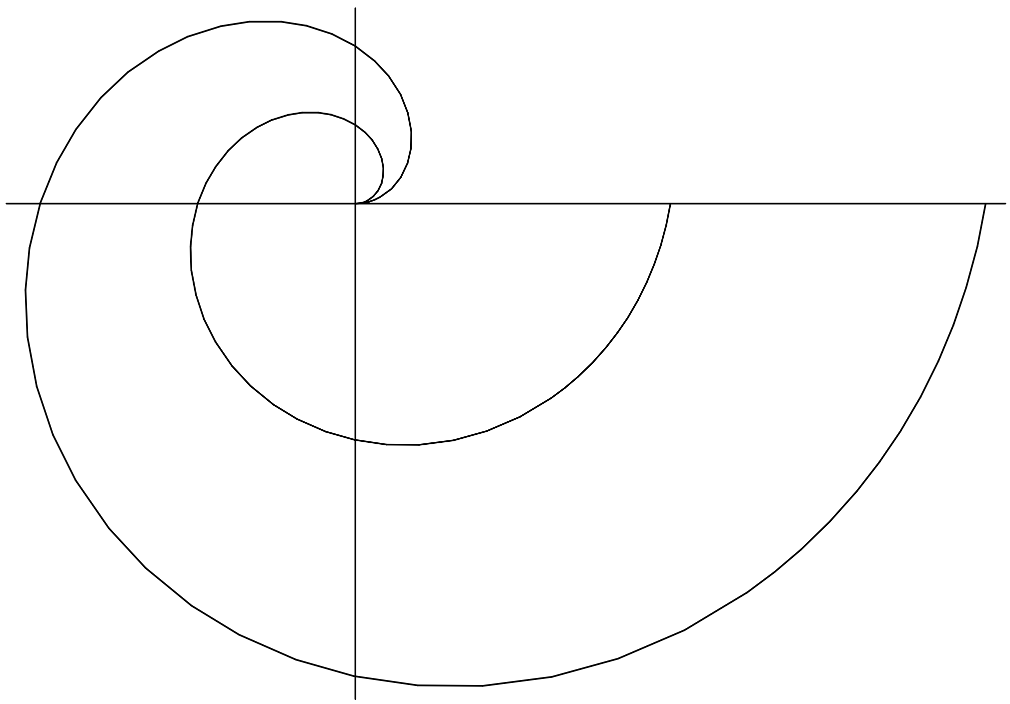
Übungen zu Analysis III

Serie 4

1. Durch eine Kugel vom Radius r_2 wird ein Loch vom Radius r_1 gebohrt, wobei die Mitte des Bohrlochs durch die Mitte der Kugel geht. Dabei sei natürlich $0 < r_1 < r_2$. Berechnen Sie das Volumen der verbleibenden durchbohrten Kugel.

2. Berechnen Sie den Flächeninhalt der skizzierten, durch zwei archimedische Spiralen und das Intervall $[c_1, c_2]$ begrenzten Menge K. Dabei ist $0 < c_1 < c_2 < 2\pi c_1$.



3. Sei $0 < r_1 < r_2 < R$ und sei

$$K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; r_1^2 \le (\sqrt{x^2+y^2} - R)^2 + z^2 \le r_2^2, \quad x \ge 0, \quad \sqrt{x^2+y^2} \ge R\}.$$

Skizzieren Sie die Menge K und berechnen Sie den Schwerpunkt von K (bei konstanter Dichte). Benutzen Sie dazu die Koordinatientransformation

$$\Phi : \; [0,\infty[\; \times \; [-\pi,\pi] \; \times [-\pi,\pi] \; \to \mathbb{R}^3,$$

$$\Phi(s,\alpha,\beta) \; = \; ((R + s\cos\beta)\cos\alpha, \; (R + s\cos\beta)\sin\alpha, \; s\sin\beta).$$

4. Zeigen Sie, dass

$$\begin{aligned} \gamma_1 : \quad & [-1,1] && \to \; \mathbb{R}^2, \quad \gamma_1(t) = (t, 1-t^2) \\ \gamma_2 : \quad & [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}] && \to \; \mathbb{R}^2, \quad \gamma_2(t) = (\sin t, \cos^2 t) \end{aligned}$$

Parametrisierungen des gleichen Kurvenstückes sind. Welche der Parametrisierungen ist glatt?

Abgabe: Mi, 19.11.03 bzw. Do, 20.11.03 in den Übungen.