WS 2003/04 Prof. Dr. W. Bergweiler

Übungen zu
Analysis III

Serie 3

1. Eine homogene, inkompressible Flüssigkeit konstanter Dichte rotiere in einem zylindrischen Gefäß vom Radius R um die z-Achse. Die Oberfläche der Flüssigkeit ist dann durch die Gleichung $z = h_1 + c(x^2 + y^2)$ gegeben, wobei c eine von der Winkelgeschwindigkeit ω abhängige Konstante ist. (Es gilt $c = \frac{\omega^2}{2g}$.)
   Die Höhe in der Mitte ist also h_1, und am Rand des Zylinders $h_2 = h_1 + c \cdot R^2$. Im Ruhezustand ($c = \omega = 0$) sei der Pegelstand h_0. Berechnen Sie h_1 und h_2 in Abhängigkeit von c und h_0.

2. Sei $0 < r < R$ und $K = \{(x, y, z) : \ (\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2 + z^2 \le r^2\}$. Skizzieren Sie die Menge K und berechnen Sie das Volumen von K.

3. Sei
$$F : (0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_{\frac{1}{2x}}^{5} (x - \frac{1}{4y}) e^{4xy} dy.$$
   Zeigen Sie, dass
$$F'(x) = \frac{e^{20x}}{4x}(20x - 1).$$

4. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$$f(x) = \left(\int_0^x e^{-t^2} dt \right)^2 + \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1 + t^2} dt.$$
   Zeigen Sie, dass $f(x) = \frac{\pi}{4}$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Zusatzaufgabe: Folgern Sie aus Aufgabe 4, dass $\int_0^\infty e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Abgabe: Mi, 12.11.03 bzw. Do, 13.11.03 in den Übungen.