Analysis III (für Physiker)
Serie 13

1. Sei $f \in \mathrm{C}^n(\mathbb{R},\mathbb{C})$ mit $f, f', ... f^{(n)} \in \mathrm{L}^1$. Zeigen Sie, dass eine Konstante $c > 0$ existiert, so dass

$$|\hat{f}(x)| \leq \frac{c}{1+|x|^n}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

Hinweis: Die Voraussetzung $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$ ist in Satz 3.5.2 nicht erforderlich.

2. Sei $f \in \mathrm{L}^1$ und es gebe $\mathrm{R} > 0$ mit $f(x) = 0$ für $|x| \geq \mathrm{R}$.
Zeigen Sie, dass $\hat{f}$ differenzierbar ist und dass mit $g(x) = xf(x)$ gilt:

$$(\hat{f})'(x) = -i\hat{g}(x).$$

Zusatz: Die Behauptung gilt für alle $f \in \mathrm{L}^1$, für welche $g \in \mathrm{L}^1$ ist.

3. Sei $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$. Zeigen Sie, dass $\hat{f}(x) = f(x)$.

Hinweis: Benutzen Sie den Zusatz zu Aufgabe 2.

4. Finden Sie ein erstes Integral für das autonome Differentialgleichungssystem (Räuber-Beute-Modell von Lotka-Volterra)

$$\dot{x}(t) = x(t)(\mathrm{A} - \mathrm{B}y(t)),$$

$$\dot{y}(t) = y(t)(-\mathrm{C} + \mathrm{D}x(t)),$$

wobei A,B,C,D > 0.
Hinweis: Ein integrierender Faktor ist $\mathrm{M}(x,y) = \frac{1}{xy}$.
Zusatz: Skizzieren Sie für $x, y > 0$ die Kurven, auf denen dieses erste Integral konstant ist.

Abgabe: Donnerstag, 12.02.04, in der Übung bzw. Freitag, 13.02.04 in der Vorlesung