Prof. Dr. W. Bergweiler WS 2003/04

Analysis III (für Physiker)
Serie 11

1. Sei $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und $C, L > 0$. Es gelte
$$0 \le \varphi(x) \le C + L \int_a^x \varphi(t)dt$$
für $x \in [a,b]$. Zeigen Sie, dass $\varphi(x) \le Ce^{L(x-a)}$ für $x \in [a,b]$.

2. Seien $x_0, y_0, \alpha, \beta, Q, f, K, L, M$ und δ wie in Satz 3.3.3 der Vorlesung (Satz von Picard-Lindelöf). Sei $y : [x_0-\delta, x_0+\delta] \to \mathbb{R}^n$ die Lösung des Anfangswertproblems
$$y' = f(x,y), \quad y(x_0) = y_0.$$
   a) Sei $\widetilde{y_0} \in \mathbb{R}^n$, $\|\widetilde{y_0} - y_0\| < \beta$, $\widetilde{\beta} = \beta - \|\widetilde{y_0} - y_0\|$ und $\widetilde{\delta} = \min\left\{\alpha, \frac{\widetilde{\beta}}{M}\right\}$. Zeigen Sie, dass eine eindeutig bestimmte Lösung $\widetilde{y} : [x_0 - \widetilde{\delta}, x_0 + \widetilde{\delta}] \to \mathbb{R}^n$ des Anfangswertproblems $y' = f(x,y)$, $y(x_0) = \widetilde{y_0}$, existiert und dass für $x \in [x_0,\ x_0 + \widetilde{\delta}]$ gilt:
$$\|\widetilde{y}(x) - y(x)\| \le \|\widetilde{y_0} - y_0\|\, e^{L(x-x_0)}.$$
   b) Sei $\widetilde{f} : Q \to \mathbb{R}^{n+1}$ stetig und es gelte $\|\widetilde{f}(x,y) - f(x,y)\| \le \varepsilon$ für alle $(x,y) \in Q$. Sei $0 < \eta \le \delta$ und sei $\widetilde{y} : [x_0, x_0+\eta] \to \mathbb{R}^n$ eine Lösung des Anfangswertproblems $y' = \widetilde{f}(x,y)$, $y(x_0) = y_0$. Zeigen Sie, dass für $x \in [x_0, x_0+\eta]$ gilt:
$$\|\widetilde{y}(x) - y(x)\| \le \varepsilon\, \eta\, e^{L(x-x_0)}$$

   Hinweis: Wenden Sie Aufgabe 1 auf $\varphi(x) = \|\widetilde{y}(x) - y(x)\|$ an.

3. Die Wronski-Determinante $W(u_1, ..., u_n)$ von n Funktionen $u_1, u_2, ..., u_n \in C^{n-1}(I)$, mit einem Intervall I, ist definiert durch
$$W(u_1, u_2, ..., u_n) = \det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & ... & u_n \\ u_1' & u_2' & ... & u_n' \\ u_1'' & u_2'' & ... & u_n'' \\ ... & ... & ... & ... \\ u_1^{(n-1)} & u_2^{(n-1)} & ... & u_n^{(n-1)} \end{pmatrix}.$$
   Zeigen Sie: Sind $u_1, u_2, ..., u_n$ Lösungen der Differentialgleichung
$$u^{(n)} + a_{n-1}u^{(n-1)} + ... + a_1 u' + a_0 u = 0,$$
   mit $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in C(I)$, so erfüllt $W = W(u_1, u_2, ..., u_n)$ die Gleichung $W' = -a_{n-1}W$.

   Hinweis: Ist $A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ mit $a_{i,j} \in C^1(I)$, und ist A_k die Matrix, die aus A durch Differenzieren der k-ten Zeile entsteht, so gilt $(\det A)' = \det A_1 + \det A_2 + ... + \det A_n$.

4. Für $t > 0$ sei

$$A(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{t} & -1 \\ \frac{1}{t^2} & \frac{2}{t} \end{pmatrix}, \quad b(t) = \begin{pmatrix} t \\ -t^2 \end{pmatrix}.$$

Dann sind durch

$$y_1(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ -t \end{pmatrix}, \quad y_2(t) = \begin{pmatrix} -t^2 \ln t \\ t + t \ln t \end{pmatrix}$$

zwei Lösungen $y_j : (0, \infty) \to \mathbb{R}^2, \quad j = 1, 2$, des homogenen Differentialgleichungssystems

$$y'(t) = A(t)y(t)$$

gegeben. Berechnen Sie die Lösung des inhomogenen Anfangswertproblems

$$y'(t) = A(t)y(t) + b(t), \quad y(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Abgabe: Mittwoch, 28.01.04, bzw. Donnerstag, 29.01.04, in den Übungen