Prof. Dr. W. Bergweiler WS 2003/04

Analysis III (für Physiker)
Serie 10

1. Gegeben sei die Differentialgleichung $\ddot{x}(t) = 1 - |x(t)|$ wie in Serie 9, Aufgabe 4.
   Zeigen Sie, dass diese Differentialgleichung mit der Anfangsbedingung $x(0) = 0,\ \dot{x}(0) = \alpha$, wobei $0 < \alpha < 1$, eine periodische Lösung besitzt und berechnen Sie die Periode dieser Lösung.
   Anmerkung: Die Funktion $x \mapsto 1 - |x|$ ist nicht differenzierbar in $x = 0$. Ihre Stammfunktion ist also nicht zweimal stetig differenzierbar, womit die Voraussetzungen von Satz 3.2.1 der Vorlesung nicht erfüllt sind. Die obige Funktion ist aber Lipschitz-stetig. Die Aussage von Satz 3.2.1 gilt auch unter dieser schwächeren Voraussetzung.

2. Sei $U \in C[a,b],\ U(a) = U(b) = c,\ U(x) < c$ für $a < x < b$.
   Es gebe $\alpha, \beta, \delta, \varepsilon > 0$ so dass $c - U(x) \geq \varepsilon |x-a|^\alpha$ für $a \leq x \leq a + \delta$ und $c - U(x) \geq \varepsilon |x - b|^\beta$ für $b - \delta \leq x \leq b$.
   Unter welchen Voraussetzungen an α und β konvergiert das Integral
   $$\int_a^b \frac{ds}{\sqrt{2(c - U(s))}} \ ?$$

3. Man führe das Iterationsverfahren von Picard-Lindelöf für die Differentialgleichung
   $$y'(x) = 2x - 2\sqrt{|y(x)|}\ , \quad y(0) = 0$$
   durch, d. h. man betrachte die rekursiv durch
   $$y_{n+1}(x) = \int_0^x (2t - 2\sqrt{|y_n(t)|})dt$$
   definierte Folge (y_n).
   (a) Sei $y_0(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
   Berechnen Sie $y_n(x)$ für $x \geq 0$ und $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie insbesondere, das (y_n) nicht konvergiert.
   (b) Sei $y(x) = \alpha_0 x^2$, wobei $0 < \alpha_0 < 1$. Zeigen Sie, dass es eine Funktion $\Phi : [0,1] \to [0,1]$ gibt, so dass $y_n(x) = \alpha_n x^2$ für $x \geq 0$ und $\alpha_n = \Phi(\alpha_{n-1})$ für $n \geq 1$, und bestimmen Sie diese Funktion.
   Zusatzaufgabe: Untersuchen Sie die Folge (α_n) auf Konvergenz.

4. Sei V Banach-Raum und sei M abgeschlossene Teilmenge von V.
   Die Funktion $f : M \to M$ genüge einer Lipschitz-Bedingung mit Lipschitz-Konstante L. Es gelte $L < 1$.
   Zeigen Sie, dass $\xi \in M$ mit $f(\xi) = \xi$ existiert und dass für jedes $x_0 \in M$ die rekursiv durch $x_{k+1} = f(x_k)$ definierte Folge (x_k) gegen ξ konvergiert.

Abgabe: Mittwoch, 21.01.04, bzw. Donnerstag, 22.01.04, in den Übungen