

**Übungen zu
Analysis III****Serie 1**

1. Seien Z, Z' Zerlegungen des abgeschlossenen Quaders $Q \subset \mathbb{R}^n$, und sei $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt. Zeigen Sie, dass

$$U(f, Z) \leq O(f, Z').$$

2. Sei $Q = [0, 1] \times [0, 1]$ und $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = x + y$. Bestimmen Sie für die durch die Quadrate

$$Q_{jk} = \left[\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n} \right] \times \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n} \right],$$

mit $j, k = 1, 2, \dots, n$, gegebenen Zerlegungen $Z_n, n \in \mathbb{N}$, die Unter- und Obersummen $U(f, Z_n)$ und $O(f, Z_n)$ und berechnen Sie damit $\int_Q f(x, y) d(x, y)$.

3. Sei $M = \{ (x, \sin \frac{1}{x}) : 0 < x \leq 1 \}$. Zeigen Sie, dass M Nullmenge ist.
4. Sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossener Quader, $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, $f(x) \geq 0$ für alle $x \in Q$ und $f(x_0) > 0$ für ein $x_0 \in Q$. Zeigen Sie, dass $\int_Q f(x) dx > 0$.

Zusatzfrage: Gilt die entsprechende Aussage auch, falls Q nicht als abgeschlossener Quader, sondern nur als messbare Teilmenge des \mathbb{R}^n vorausgesetzt wird?

Abgabe: Mi, 29.10.03 bzw. Do, 30.10. in den Übungen.