Analysis III
Serie 11

1. Gegeben sei auf dem Intervall $(0, \infty)$ das lineare Differentialgleichungssystem $y'(x) = A(x)y(x)$ mit
$$A(x) = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{x} & \dfrac{1}{x^2} \\ & \\ -2 & \dfrac{3}{x} \end{pmatrix} .$$
Zeigen Sie, dass
$$Y(x) = \begin{pmatrix} 1 & x \\ & \\ x & 2x^2 \end{pmatrix}$$
Fundamentalmatrix des Systems ist und bestimmen Sie die Standardfundamentalmatrix bezüglich des Punktes $x_0 = 1$.

   Bestimmen Sie auch eine Lösung mit der Anfangsbedingung $y(1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. Gegeben sei das Differentialgleichungssystem
$$\begin{aligned} y_1'(x) &= \frac{2x}{1-x^2}\, y_1(x) - \frac{2}{1-x^2}\, y_2(x) , \\ y_2'(x) &= y_1(x) \end{aligned}$$
auf dem Intervall $(-1, 1)$.

   Zeigen Sie, dass $y(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}$ Lösung ist.

   Bestimmen Sie mit Hilfe des d'Alembertschen Reduktionsverfahrens eine von obiger Lösung linear unabhängige Lösung.

   Bemerkung. Sie dürfen ohne Beweis benutzen, dass
$$x \mapsto \frac{1}{4} \log \frac{1+x}{1-x} + \frac{x}{2(1-x^2)}$$
Stammfunktion von
$$x \mapsto \frac{1}{(1-x^2)^2}$$
ist. (Trotzdem sollten Sie darüber nachdenken, wie Sie eine Stammfunktion ohne diesen Hinweis berechnen würden.)

3. Sei
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} .$$

Berechnen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = Ay, \quad y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

4. Sei $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und $x_0, y_0, y_1 \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem

$$y''(x) = \sin y(x) + h(x), \quad y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1,$$

eine Lösung auf $\mathbb{R}$ hat. (Argumente, die völlig analog zu denen im Beweis von Satz 6.1 sind, müssen nicht ausgeführt werden.)

Die Lösungen sind bis Donnerstag, den 30.1.2014, 10:00 Uhr, im Fach des jeweiligen Übungsleiters abzugeben. Aufgabe 4 muss von Studierenden des 2-Fach-Bachelor-Studiengangs nicht bearbeitet werden.