Prof. Dr. W. Bergweiler Wintersemester 2013/14

Analysis III
Serie 10

1. Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von Picard-Lindelöf, dass das Anfangswertproblem

$$y'(x) = x^2 + xy(x)^2, \quad y(0) = 0$$

eine eindeutig bestimmte Lösung auf dem Intervall $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ hat.

Können Sie ein größeres Intervall angeben, in dem das Anfangswertproblem eine eindeutig bestimmte Lösung hat?

2. Geben Sie ein Intervall an, in dem das Anfangswertproblem

$$y''(x) = y(x)^2 + x^2, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1$$

eine Lösung besitzt.

3. Zeigen Sie, dass die Differentialgleichung

$$xy''(x) + y'(x) + xy(x) = 0$$

eine Lösung $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ besitzt, indem Sie einen Potenzreihenansatz

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

machen.

Warum folgt die Existenz einer Lösung nicht aus Sätzen der Vorlesung?

4. Sei $f\colon [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} 0 & \text{für } x = 0,\ y \in \mathbb{R} \\ 2x & \text{für } 0 < x \le 1,\ y < 0 \\ 2x - \dfrac{4y}{x} & \text{für } 0 < x \le 1,\ 0 \le y \le x^2 \\ -2x & \text{für } 0 < x \le 1,\ y > x^2. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f stetig ist und dass für das Anfangswertproblem

$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad y(0) = 0$$

die Picard-Lindelöfsche Folge $(y_n(x))$ für $n \in \mathbb{N}$ durch $y_n(x) = (-1)^{n+1}x^2$ gegeben ist.

Können Sie eine Lösung des Anfangswertproblems angeben?

Die Lösungen sind bis Donnerstag, den 23.1.2014, 10:00 Uhr, im Fach des jeweiligen Übungsleiters abzugeben. Aufgabe 4 muss von Studierenden des 2-Fach-Bachelor-Studiengangs nicht bearbeitet werden.