Analysis III
Serie 9

1. Sei $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0,1\}$. Zeigen Sie, dass die Differentialgleichung

$$y'(x) = u(x)y(x) + v(x)y(x)^{\alpha}$$

durch die Transformation

$$z(x) = y(x)^{1-\alpha}$$

in eine lineare Differentialgleichung überführt wird. Dabei sind u und v gegebene, auf einem Intervall I stetige, reellwertige Funktionen und es sind, gegebenenfalls nur auf einem Teilintervall von I definierte, stetig differenzierbare, positive Lösungen y gesucht.

Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$y'(x) = 2y(x) - 2x\sqrt{y(x)}, \quad y(0) = 1 \,.$$

2. Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$4x - 3\sqrt{xy(x)} + \left(1 - x\sqrt{\frac{x}{y(x)}}\right) y'(x) = 0, \quad y(4) = 4.$$

3. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y' = c_2 y^2 + c_1 y + c_0 \tag{1}$$

mit stetigen Funktionen $c_0, c_1, c_2 \colon I \to \mathbb{R}$, wobei I Intervall ist.

Zeigen Sie, dass stetige Funktionen $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} \colon I \to \mathbb{R}$ mit folgender Eigenschaft existieren: Ist $x_0 \in I$, $y_0 \in \mathbb{R}$,

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} : I \to \mathbb{R}^2$$

Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} u(x_0) \\ v(x_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

I_0 Intervall mit $x_0 \in I_0 \subseteq I$ und $v(x) \neq 0$ für $x \in I_0$, so ist durch

$$y \colon I_0 \to \mathbb{R}, \quad y(x) = \frac{u(x)}{v(x)},$$

eine Lösung der Differentialgleichung (1) mit der Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$ gegeben.

Ein Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ heißt sternförmig, falls $\xi \in \Omega$ existiert, so dass für alle $x \in \Omega$ auch die Verbindungsstrecke $[\xi, x] = \{(1-t)\xi + tx \colon 0 \leq t \leq 1\}$ in Ω liegt.

4. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ sternförmiges Gebiet und sei $f = (f_1, \ldots, f_d) \colon \Omega \to \mathbb{R}^d$ stetig differenzierbar. Es gelte $\partial f_k / \partial x_j = \partial f_j / \partial x_k$ für alle $j, k \in \{1, \ldots, d\}$. Zeigen Sie, dass f ein Potential besitzt.

   Hinweis. Die Definition der Sternförmigkeit sei mit $\xi = 0$ erfüllt. Zeigen Sie, dass durch

   $$U(x) = \int_0^1 \langle x, f(tx) \rangle dt$$

   ein Potential definiert wird. Dabei bezeichnet $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Skalarprodukt.

Die Lösungen sind bis Donnerstag, den 16.1.2014, 10:00 Uhr, im Fach des jeweiligen Übungsleiters abzugeben. Aufgabe 4 muss von Studierenden des 2-Fach-Bachelor-Studiengangs nicht bearbeitet werden.