Prof. Dr. W. Bergweiler Wintersemester 2013/14

Analysis III
Serie 7

1. Berechnen Sie das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$, indem Sie die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$$

einmal in kartesischen Koordinaten und einmal in Polarkoordinaten über $\mathbb{R}^2$ integrieren.

2. Sei $R_2 > R_1 > 0$ und sei

$$K := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon R_1^2 \le x^2+y^2+z^2 \le R_2^2,\ z \ge \sqrt{x^2+y^2}\right\}.$$

Skizzieren Sie K und bestimmen Sie das Volumen und den Schwerpunkt von K.

Hinweis. Verwenden Sie Kugelkoordinaten.

3. Sei $R > 0$ und $U := (0,R) \times (-\pi,\pi) \times (-\pi,\pi) \subset \mathbb{R}^3$. Sei $T\colon U \to \mathbb{R}^3$,

$$\begin{pmatrix} t \\ \varphi \\ \theta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} (R + t\cos\theta)\cos\varphi \\ (R + t\cos\theta)\sin\varphi \\ t\sin\theta \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass T injektiv ist. (Sie dürfen benutzen, dass die Polarkoordinatenabbildung $P\colon (0,\infty) \times (-\pi,\pi) \to \mathbb{R}^2$, $(r,\phi) \mapsto (r\cos\phi, r\sin\phi)$ injektiv ist.)

Berechnen Sie die Funktionalmatrix und die Funktionaldeterminante von T.

Sei $0 < r < R$ und $H = (0,r) \times (-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi) \times (-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$. Fertigen Sie eine (grobe) Skizze von $T(H)$ an und bestimmen Sie das Volumen von $T(H)$.

4. Sei $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Zeigen Sie, dass $x_1 \in \mathbb{R}$ existiert, so dass für alle $x_0 \in \mathbb{R}$, $y_0 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ die Lösung des Anfangswertproblems

$$y'(x) = \alpha y(x),\ y(x_0) = y_0$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ der Bedingung

$$y(x + x_1) = \frac{1}{2}\, y(x)$$

genügt. Berechnen Sie x_1.

Für $\alpha < 0$ ist obige Differentialgleichung ein Modell für den radioaktiven Zerfall.
Wie kann x_1 interpretiert werden?

Die Lösungen sind bis Donnerstag, den 19.12.2013, 10:00 Uhr, im Fach des jeweiligen Übungsleiters abzugeben.