Analysis III
Serie 6

1. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ lokal integrierbar und es existiere das iterierte Integral

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x,y)| dx \right) dy \ ,$$

das heißt, die durch $y \mapsto \int_{\mathbb{R}} |f(x,y)| dx$ gegebene Funktion ist für alle y außerhalb einer Nullmenge N integrierbar und die durch

$$y \mapsto \begin{cases} \int_{\mathbb{R}} |f(x,y)| dx, & \text{falls } y \notin N, \\ 0 & \text{falls } y \in N, \end{cases}$$

definierte Funktion ist integrierbar.

Zeigen Sie, dass f integrierbar ist.

2. Zeigen Sie, dass durch

$$F(x) = \int_0^\infty e^{-t^2} \sin(xt) dt$$

eine differenzierbare Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert wird, die der Gleichung

$$F'(x) = \frac{1}{2}(1 - xF(x))$$

genügt.

3. Durch eine Kugel vom Radius $R > 0$ wird ein Loch vom Radius $\frac{1}{2}R$ gebohrt. Der Rand des Bohrlochs verlaufe durch den Mittelpunkt der Kugel. Berechnen Sie das Volumen des ausgebohrten Teils der Kugel.

Hinweis. Verwenden Sie Zylinderkoordinaten (mit einer Bohrung parallel zur z-Achse).

4. Sei $A \subset \mathbb{R}^d$ messbar und $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$ integrierbar. Zeigen Sie, dass für jedes $c \in \mathbb{R}$ die Menge $A_c = \{x \in A : f(x) \geq c\}$ messbar ist und $v(A_c) \to 0$ für $c \to \infty$ gilt.

Hinweis. Konstruieren Sie zunächst eine integrierbare Funktion $g : A \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = 1$ für $x \in A_c$ und $0 \leq g(x) < 1$ für $x \in A \setminus A_c$. Betrachten Sie dann die Folge (g^k).

Die Lösungen sind bis Donnerstag, den 12.12.2013, 10:00 Uhr, im Fach des jeweiligen Übungsleiters abzugeben.