Prof. Dr. W. Bergweiler Wintersemester 2013/14

Analysis III
Serie 5

1. Sei $r\colon [a,b] \to (0,\infty)$ stetig und sei
$$K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 \leq r(z)^2, a \leq z \leq b\} \ .$$
Zeigen Sie, dass K messbar ist und
$$v(K) = \pi \int_a^b r(z)^2 dz$$
gilt.
Benutzen Sie die Formel, um das Volumen eines Kegels der Höhe h zu berechnen, dessen Grundfläche ein Kreis mit Radius R ist.

2. Seien $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Zeigen Sie, dass $f \cdot \overline{g} \in L^1(\mathbb{R}^d)$ und dass durch
$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\overline{g(x)} dx$$
ein Skalarprodukt auf $L^2(\mathbb{R}^d)$ definiert wird.

3. Berechnen Sie
$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{\sqrt{n}\cos(x^2)}{1+nx^2} dx \ .$$
Hinweis. Substituieren Sie $y = \sqrt{n}x$.

4. Es seien (A_k), (C_k) und C wie in Aufgabe 4 der Serie 2. Für $k \in \mathbb{N}_0$ sei $f_k\colon [0,1] \to \mathbb{R}$,
$$f_k(x) = \frac{\operatorname{card}\{I \in A_k \colon I \subseteq [0,x]\}}{2^k}.$$
Dabei bezeichnet card X die Kardinalität (also die Anzahl der Elemente) einer endlichen Menge X.
Zeigen Sie, dass die Folge (f_k) monoton wachsend und beschränkt ist und dass der Grenzwert $f = \lim_{k\to\infty} f_k$ stetig und fast überall differenzierbar mit Ableitung 0 ist.
Genauer gilt: f ist differenzierbar in $[0,1]\backslash C$ und $f'(x) = 0$ für $x \in [0,1]\backslash C$.

Die Lösungen sind bis Donnerstag, den 05.12.2013, 10:00 Uhr, im Fach des jeweiligen Übungsleiters abzugeben. Aufgabe 4 muss von Studierenden des 2-Fach-Bachelor-Studiengangs nicht bearbeitet werden.