Analysis III
Serie 4

1. Durch eine Kugel vom Radius R wird ein Loch vom Radius r gebohrt. Dabei sei $0 < r < R$. Der Mittelpunkt der Kugel sei auch der Mittelpunkt des Bohrlochs. Berechnen Sie das Volumen des verbleibenden Teils der Kugel.

2. Sei $K \subset \mathbb{R}^3$ kompakt. Es sei J_z das Trägheitsmoment von K bzgl. der z-Achse. Sei g eine Gerade durch den Schwerpunkt von K, die parallel zur z-Achse ist, und sei d der Abstand des Schwerpunkts von der z-Achse.

   Zeigen Sie, dass
   $$J_g = J_z - v(K)d^2$$
   gilt.

3. Sei $\alpha > 0$ und $f\colon [1, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{\cos x}{x^\alpha}$.

   (i) Zeigen Sie, dass das uneigentliche Riemann-Integral
   $$\int_1^\infty f(x)dx$$
   existiert.

   (ii) Zeigen Sie, dass $f \notin L^1(1, \infty)$ falls $\alpha \leq 1$. Bestimmen Sie allgemeiner die Menge aller $p \in [1, \infty)$, für die $f \in L^p(1, \infty)$.

Definition. Eine Funktion $f : \mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}$ heißt *halbstetig von unten*, falls für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ die Menge $\{x \in \mathbb{R}^d : f(x) > \alpha\}$ offen ist.

4. Zeigen Sie, dass jede nicht-negative, von unten halbstetige Funktion punktweiser Grenzwert einer monoton wachsenden Folge von Treppenfunktionen ist.

Die Lösungen sind bis Donnerstag, den 28.11.2013, 10:00 Uhr, im Fach des jeweiligen Übungsleiters abzugeben. Aufgabe 4 muss von Studierenden des 2-Fach-Bachelor-Studiengangs nicht bearbeitet werden.