Prof. Dr. W. Bergweiler Wintersemester 2013/14

Analysis III
Serie 3

1. Vervollständigen Sie den Beweis von Lemma I.2.8 der Vorlesung.

Definition: Sei $K \subset \mathbb{R}^d$ kompakt. Der Schwerpunkt $s = (s_1, \ldots, s_d)$ von K ist definiert durch

$$s_k = \frac{1}{v(K)} \int_K x_k \, dx, \quad k = 1, \ldots, d \, .$$

Dabei ist $v(K) = \int_K 1 \, dx = \int_{\mathbb{R}^d} \chi_K(x) dx$ das Volumen von K.

2. Berechnen Sie den Schwerpunkt der Halbkugel $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, \ z \geq 0\}$.

Definition: Sei $K \subset \mathbb{R}^3$ kompakt und sei $g \subset \mathbb{R}^3$ Gerade. Für $u \in \mathbb{R}^3$ sei $d(u, g)$ der Abstand von u zu g, d.h.,

$$d(u, g) = \inf_{v \in g} \|u - v\| \, .$$

Dann heißt

$$J_g = \int_K d(u, g)^2 du$$

das *Trägheitsmoment* von K bezüglich der Geraden g.

3. Sei K der Tetraeder mit den Ecken $(0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0)$ und $(0, 0, 1)$. Berechnen Sie das Trägheitsmoment von K bzgl. der z-Achse.

4. Sei $A \subset \mathbb{R}^p$ Nullmenge und sei $B \subseteq \mathbb{R}^q$. Zeigen Sie, dass $A \times B$ Nullmenge (im $\mathbb{R}^{p+q}$) ist.

Die Lösungen sind bis Donnerstag, den 21.11.2013, 10:00 Uhr, im Fach des jeweiligen Übungsleiters abzugeben.