Prof. Dr. W. Bergweiler Wintersemester 2013/14

Analysis III
Serie 2

1. Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$$f(x) = \exp\left(-\lfloor |x| \rfloor\right)\ .$$
Zeigen Sie, dass f integrierbar ist und berechnen Sie $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx$.

2. Sei $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = 0$ falls $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ und durch $f(x) = 1/q$ falls $x \in \mathbb{Q}$, wobei q die kleinste natürliche Zahl ist, so dass x eine Darstellung $x = p/q$ mit $p \in \mathbb{Z}$ und $0 \le p \le q$ hat. Berechnen Sie das Oberintegral
$$\overline{\int_0^1} f(x)\,dx\ .$$

3. Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, und sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt und Lebesgue-integrierbar. Zeigen Sie, dass für das Lebesgue-Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ sowie die Ober- und Untersummen $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx$ und $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx$ die Ungleichung
$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$$
gilt.

4. Für $k \in \mathbb{N}_0$ sei A_k die folgende, rekursiv definierte Menge abgeschlossener Intervalle: Es ist $A_0 = \{[0,1]\}$ und A_k entsteht aus A_{k-1}, in dem aus jedem Interval in A_{k-1} das mittlere Drittel entfernt wird.

   Es gilt also
$$A_1 = \left\{\left[0,\frac{1}{3}\right], \left[\frac{2}{3},1\right]\right\} \quad \text{und} \quad A_2 = \left\{\left[0,\frac{1}{9}\right], \left[\frac{2}{9},\frac{1}{3}\right], \left[\frac{2}{3},\frac{7}{9}\right], \left[\frac{8}{9},1\right]\right\}.$$
   Weiter sei
$$C_k = \bigcup_{I \in A_k} I \quad \text{und} \quad C = \bigcap_{k=0}^{\infty} C_k.$$
   Zeigen Sie, dass C kompakt und überabzählbar ist und dass $\|\chi_C\|_1 = 0$ gilt.

Die Lösungen sind bis Donnerstag, den 14.11.2013, 10:00 Uhr, im Fach des jeweiligen Übungsleiters abzugeben. Aufgabe 4 muss von Studierenden des 2-Fach-Bachelor-Studiengangs nicht bearbeitet werden.