Prof. Dr. W. Bergweiler Wintersemester 2013/14

Analysis III
Serie 1

1. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor, & \text{falls } 0 \le x \le 2 \text{ und } 0 \le y \le 2; \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

   Dabei ist $\lfloor x \rfloor$ die größte ganze Zahl, die nicht größer als x ist.

   Zeigen Sie durch explizite Angabe von reellen Zahlen $c_1, \ldots, c_n$ und paarweise disjunkten Quadern $Q_1, \ldots, Q_n$ mit

$$f = \sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{Q_k} \ ,$$

   dass f Treppenfunktion ist.

2. Berechnen Sie die Integrale

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3} \, dx \right) dy$$

   und

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3} \, dy \right) dx \ .$$

3. Zeigen Sie, dass für reelle Treppenfunktionen φ und ψ auch $\max\{\varphi, \psi\}$ und $\min\{\varphi, \psi\}$ Treppenfunktionen sind.

4. Zeigen Sie, dass sich die Definition der L^1-Halbnorm nicht ändert, wenn man in der Definition der Hüllreihe an Stelle von offenen Quadern abgeschlossene Quader nimmt.

Die Lösungen sind bis Donnerstag, den 07.11.2013, 10:00 Uhr, im Fach des jeweiligen Übungsleiters abzugeben.