

Name: \_\_\_\_\_ Matrikel-Nr.: \_\_\_\_\_

**Klausur zur Vorlesung „Analysis III“  
im Studiengang 2-Fach-Bachelor Mathematik  
13. Februar 2013, 13:10 - 15:10 Uhr**

Für die Bearbeitung der folgenden 6 Aufgaben werden bei vollständig richtiger Bearbeitung jeweils 10 Punkte vergeben. Wer insgesamt 24 Punkte erreicht, hat die Klausur bestanden. Jede Aufgabe ist auf einem separaten Blatt zu bearbeiten. Jedes Blatt ist mit Matrikelnummer und Namen zu versehen. Bearbeitungszeit: 2 Stunden. Viel Erfolg! 😊

1. (a) Was ist eine Nullmenge? (2 Punkte)

(b) Was ist eine exakte Differentialgleichung? (4 Punkte)

(c) Wie lautet die Gronwallsche Ungleichung? (4 Punkte)

Weiter auf Seite 2

Name: \_\_\_\_\_ Matrikel-Nr.: \_\_\_\_\_

2. Berechnen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$y'(x) = \frac{\sqrt{1 + y(x)} \ln x}{x}, \quad y(1) = 3.$$

Zeigen Sie, dass die Lösung auf dem Intervall  $(0, \infty)$  existiert.

Weiter auf Seite 3

3. Sei  $F : (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$F(x) = \int_0^{\infty} e^{-xy} dy.$$

Zeigen Sie, dass  $F$  differenzierbar ist und

$$F'(2) = -\frac{1}{2e^2}$$

gilt.

Weiter auf Seite 4

4. Sei  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(x) = \frac{1}{x + \sqrt{x}}.$$

Zeigen Sie, dass  $f \notin L^1(0, \infty)$  gilt.

Zeigen Sie, dass  $p \in (1, \infty)$  existiert, so dass  $f \in L^p(0, \infty)$  gilt.

Weiter auf Seite 5

Name: \_\_\_\_\_ Matrikel-Nr.: \_\_\_\_\_

5. Berechnen Sie das Volumen des Schnitts der Kugel um 0 vom Radius  $\sqrt{2}$  mit dem Paraboloid  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq x^2 + y^2\}$ .

Weiter auf Seite 6

Name: \_\_\_\_\_ Matrikel-Nr.: \_\_\_\_\_

6. Seien  $a, b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und seien  $y_1, y_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  Lösungen der Differentialgleichung

$$y''(x) + a(x)y'(x) + b(x)y(x) = 0.$$

Zeigen Sie: Wenn  $y_1$  und  $y_2$  ein Fundamentalsystem bilden, so haben sie keine gemeinsame Nullstelle.

Name: \_\_\_\_\_ Matrikel-Nr.: \_\_\_\_\_

Name: \_\_\_\_\_ Matrikel-Nr.: \_\_\_\_\_



Name: \_\_\_\_\_ Matrikel-Nr.: \_\_\_\_\_

Name: \_\_\_\_\_ Matrikel-Nr.: \_\_\_\_\_

Name: \_\_\_\_\_ Matrikel-Nr.: \_\_\_\_\_