Name: ______________________ Matrikel-Nr.: ____________

Klausur zur Vorlesung „Analysis III"
im Studiengang 1-Fach-Bachelor Mathematik
13. Februar 2013, 13:10 - 15:50 Uhr

Für die Bearbeitung der folgenden 8 Aufgaben werden bei vollständig richtiger Bearbeitung jeweils 10 Punkte vergeben. Wer insgesamt 32 Punkte erreicht, hat die Klausur bestanden. Jede Aufgabe ist auf einem separaten Blatt zu bearbeiten. Jedes Blatt ist mit Matrikelnummer und Namen zu versehen. Bearbeitungszeit: 2 Stunden und 40 Minuten. Viel Erfolg! ☺

1. (a) Was ist eine Nullmenge? (2 Punkte)

   (b) Was ist eine exakte Differentialgleichung? (4 Punkte)

   (c) Wie lautet die Gronwallsche Ungleichung? (4 Punkte)

Weiter auf Seite 2

Name: ______________________________ Matrikel-Nr.: ______________

2. Berechnen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$y'(x) = \frac{\sqrt{1+y(x)}\,\ln x}{x}, \qquad y(1) = 3.$$

Zeigen Sie, dass die Lösung auf dem Intervall $(0, \infty)$ existiert.

Weiter auf Seite 3

Name: ______________________________ Matrikel-Nr.: ______________

3. Sei $F : (1, \infty) \to \mathbb{R}$,

$$F(x) = \int_0^\infty e^{-xe^y}\, dy.$$

Zeigen Sie, dass F differenzierbar ist und

$$F'(2) = -\frac{1}{2e^2}$$

gilt.

Weiter auf Seite 4

4. Sei $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{x + \sqrt{x}}.$$

Zeigen Sie, dass $f \notin L^1(0, \infty)$ gilt.

Zeigen Sie, dass $p \in (1, \infty)$ existiert, so dass $f \in L^p(0, \infty)$ gilt.

Weiter auf Seite 5

5. Berechnen Sie das Volumen des Schnitts der Kugel um 0 vom Radius $\sqrt{2}$ mit dem Paraboloid $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; z \geq x^2 + y^2\}$.

Weiter auf Seite 6

6. Seien $a, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und seien $y_1, y_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lösungen der Differentialgleichung

$$y''(x) + a(x)y'(x) + b(x)y(x) = 0.$$

Zeigen Sie: Wenn y_1 und y_2 ein Fundamentalsystem bilden, so haben sie keine gemeinsame Nullstelle.

Weiter auf Seite 7

Name: ______________________ Matrikel-Nr.: ______________

7. Seien $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R}^2 \to [0, \infty)$ stetig differenzierbar. Es gelte

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \geq 0$$

für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Sei $(y_n)_{n\geq 0}$ die zum Anfangswertproblem

$$y'(x) = f(x, y(x)), \qquad y(x_0) = y_0,$$

gehörende Picard-Lindelöfsche Folge.

Zeigen Sie, dass für $x \geq x_0$ die Folge $(y_n(x))_{n\geq 0}$ monoton steigend ist.

Weiter auf Seite 8

Name: ______________________ Matrikel-Nr.: ______________

8. Für $A \subset \mathbb{R}^d$ nichtleer und $\delta > 0$ sei

$$U_\delta(A) = \{x \in \mathbb{R}^d : \quad \operatorname{dist}(x, A) < \delta\}.$$

Sei $N \subset \mathbb{R}^d$ kompakte, nichtleere Nullmenge.

Zeigen Sie, dass

$$\lim_{n\to\infty} v\Big(U_{\frac{1}{n}}(N)\Big) = 0.$$