

Name: _____ Matrikel-Nr.: _____

**Klausur zur Vorlesung „Analysis III“
im Studiengang 2-Fach-Bachelor Mathematik
03. April 2014, 8:10 - 10:10 Uhr**

Für die Bearbeitung der folgenden 6 Aufgaben werden bei vollständig richtiger Bearbeitung jeweils 10 Punkte vergeben. Wer insgesamt 24 Punkte erreicht, hat die Klausur bestanden. Jede Aufgabe ist auf einem separaten Blatt zu bearbeiten. Jedes Blatt ist mit Matrikelnummer und Namen zu versehen. Bearbeitungszeit: 2 Stunden. Viel Erfolg! 😊

1. (a) Wie lautet die Höldersche Ungleichung? (3 Punkte)

(b) Wie lautet der Satz von Riesz-Fischer? (4 Punkte)

(c) Was ist eine Wronski-Determinante? (3 Punkte)

Weiter auf Seite 2

Name: _____ Matrikel-Nr.: _____

2. Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y'(x) = \frac{2y(x)}{x} + \frac{4x}{y(x)}, \quad y(2) = 8.$$

Die Angabe eines konkreten Intervalls, auf dem die Lösung existiert, ist nicht erforderlich.

Weiter auf Seite 3

Name: _____ Matrikel-Nr.: _____

3. Berechnen Sie

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{e^{nx} + x} dx .$$

Weiter auf Seite 4

Name: _____ Matrikel-Nr.: _____

4. Sei K die Menge aller Punkte des \mathbb{R}^3 , die innerhalb der abgeschlossenen Kugel vom Radius 1 um den Nullpunkt und außerhalb der offenen Kugel vom Radius $\sqrt{2}$ um den Punkt $(0, 0, -1)$ liegen. Berechnen Sie das Volumen von K .

Weiter auf Seite 5

Name: _____ Matrikel-Nr.: _____

5. Sei $1 \leq p_1 < p_2 < \infty$ und sei $f \in L^{p_1}(\mathbb{R}^d) \cap L^{p_2}(\mathbb{R}^d)$.
Zeigen Sie, dass für $p_1 < p < p_2$ dann auch $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ gilt.

Weiter auf Seite 6

Name: _____ Matrikel-Nr.: _____

6. Sei A eine reelle $(n \times n)$ -Matrix. Zeigen Sie: Besitzt A einen Eigenwert mit negativem Realteil, so hat das Differentialgleichungssystem

$$y'(x) = A \cdot y(x)$$

eine nicht-triviale Lösung $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, für die

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = 0$$

gilt.

Name: _____ Matrikel-Nr.: _____

Name: _____ Matrikel-Nr.: _____

Name: _____ Matrikel-Nr.: _____

Name: _____ Matrikel-Nr.: _____

Name: _____ Matrikel-Nr.: _____