Name: ______________________________ Matrikel-Nr.: ______________

Klausur zur Vorlesung „Analysis III"
im Studiengang 1-Fach-Bachelor Mathematik
03. April 2014, 8:10 - 10:50 Uhr

Für die Bearbeitung der folgenden 8 Aufgaben werden bei vollständig richtiger Bearbeitung jeweils 10 Punkte vergeben. Wer insgesamt 32 Punkte erreicht, hat die Klausur bestanden. Jede Aufgabe ist auf einem separaten Blatt zu bearbeiten. Jedes Blatt ist mit Matrikelnummer und Namen zu versehen. Bearbeitungszeit: 2 Stunden und 40 Minuten. Viel Erfolg! ☺

1. (a) Wie lautet die Höldersche Ungleichung? (3 Punkte)

   (b) Wie lautet der Satz von Riesz-Fischer? (4 Punkte)

   (c) Was ist eine Wronski-Determinante? (3 Punkte)

Weiter auf Seite 2

Name: ______________________ Matrikel-Nr.: ______________

2. Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y'(x) = \frac{2y(x)}{x} + \frac{4x}{y(x)}, \qquad y(2) = 8.$$

Die Angabe eines konkreten Intervalls, auf dem die Lösung existiert, ist nicht erforderlich.

Weiter auf Seite 3

Name: ______________________________ Matrikel-Nr.: ______________

3. Berechnen Sie

$$\lim_{n\to\infty} n^2 \int_0^\infty \frac{\sin x}{e^{nx} + x} \, dx \, .$$

Weiter auf Seite 4

Name: ______________________________ Matrikel-Nr.: ______________

4. Sei K die Menge aller Punkte des $\mathbb{R}^3$, die innerhalb der abgeschlossenen Kugel vom Radius 1 um den Nullpunkt und außerhalb der offenen Kugel vom Radius $\sqrt{2}$ um den Punkt $(0,0,-1)$ liegen. Berechnen Sie das Volumen von K.

Weiter auf Seite 5

Name: ______________________________ Matrikel-Nr.: ______________

5. Sei $1 \leq p_1 < p_2 < \infty$ und sei $f \in L^{p_1}(\mathbb{R}^d) \cap L^{p_2}(\mathbb{R}^d)$.
   Zeigen Sie, dass für $p_1 < p < p_2$ dann auch $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ gilt.

Weiter auf Seite 6

6. Sei A eine reelle $(n \times n)$-Matrix. Zeigen Sie: Besitzt A einen Eigenwert mit negativem Realteil, so hat das Differentialgleichungssystem

$$y'(x) = A \cdot y(x)$$

eine nicht-triviale Lösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, für die

$$\lim_{x \to \infty} y(x) = 0$$

gilt.

Weiter auf Seite 7

Name: ______________________________ Matrikel-Nr.: ______________

7. Sei $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ stetig. Für $k \in \mathbb{N}$ sei

$$U_k = \left\{ x \in (0,1) : \ |f(x)| > 2^k \right\}.$$

Es gelte

$$v(U_k) \leq \frac{1}{3^k}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass f integrierbar ist.

Weiter auf Seite 8

Name: ______________________________ Matrikel-Nr.: ______________

8. Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y'(x) = x + \frac{1}{2}\sin y(x), \quad y(0) = 0.$$

Sei $(y_n)_{n\geq 0}$ die Picard-Lindelöf-Folge. Zeigen Sie, dass

$$\max_{x\in[-1,1]} |y_n(x) - y(x)| \leq \frac{1}{2^n}\ .$$

Hinweis. Schätzen Sie zunächst $|y_{n+1}(x) - y_n(x)|$ ab.