Prof. Dr. W. Bergweiler WS 2009/2010

Klausur zu Analysis III

18. Februar 2010

Für die Bearbeitung der folgenden 9 Aufgaben werden jeweils maximal 10 Punkte vergeben. Wer insgesamt 36 Punkte erreicht hat, hat die Klausur bestanden.

Jede Aufgabe ist auf einem separaten Blatt zu bearbeiten. Jedes Blatt ist mit Matrikelnummer und Name zu versehen.

Viel Erfolg!

Bearbeitungszeit: 3 Stunden

1. (a) Was ist ein offener Quader im $\mathbb{R}^d$, wobei $d \in \mathbb{N}$? (2 Punkte)

   (b) Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, und sei $d \in \mathbb{N}$. Sei $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^d$ eine stückweise glatte Kurve und $f : Sp(\gamma) \to \mathbb{R}^d$ stetig. Wie ist das orientierte Kurvenintegral von f über γ definiert? (4 Punkte)

   (c) Wie lautet die Cauchysche Integralformel? (4 Punkte)

2. Sei $R > 0$ und sei
$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq R^2, \ \ y \geq |x|\} .$$
Der Flächeninhalt von K ist $\frac{1}{4}\pi R^2$. Berechnen Sie den Schwerpunkt von K.

   Fertigen Sie auch eine (grobe) Skizze von K an.

3. Sei $R > 0$, sei K_1 die abgeschlossene Kugel mit Mittelpunkt $(0, 0, 0)$ und Radius R, und sei K_2 die abgeschlossene Kugel mit Mittelpunkt $(0, 0, R)$ und Radius R. Berechnen Sie das Volumen von $K_1 \cap K_2$.

4. Sei $N \subset \mathbb{R}$ eine Nullmenge und sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig, d.h., es existiere $L \geq 0$ mit
$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$$
für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass auch $f(N)$ eine Nullmenge ist.

5. Sei $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$,
$$f(x) = \frac{\cos x}{x} .$$
Zeigen Sie, dass f nicht Lebesgue-integrierbar über $[1, \infty)$ ist.

6. Bestimmen Sie
$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{[0,\infty)} \frac{x^n e^{-x}}{1 + x^n} \, dx .$$

7. Zeigen Sie, dass die durch

$$F(x) = \int\limits_{[2,\infty)} \frac{\arctan(t^x)}{(4+t^2)\log t}\, dt$$

definierte Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar ist und berechnen Sie $F'(0)$.

8. Seien $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$u(x,y) = (e^y + e^{-y}) \sin x, \quad v(x,y) = (e^y - e^{-y}) \cos x \ .$$

Zeigen Sie, dass die durch $f = u + iv$ definierte Funktion f holomorph ist.

9. Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$y'(x) = \frac{1}{y(x)\sqrt{1-x^2}} \ , \quad y(0) = 1 \ .$$

Bestimmen Sie auch das maximale Intervall, in dem die Lösung existiert.