Zusatzaufgaben - Analysis III

Aufgabe 1. Sei $\triangle \subset \mathbb{R}^2$ das Dreieck mit den Eckpunkten $(0,0)$, $(\pi/2,0)$ und $(\pi/2,1)$. Berechnen Sie das Integral

$$\int_{\partial\triangle} (y - \sin x)\ dx + \cos x\ dy.$$

Aufgabe 2. Bestimen Sie die Lösung y der Differentialgleichung

$$y' = 3x^2(1+y^2), \quad y(3) = \sqrt{3}.$$

Geben Sie dabei das maximale Intervall an, in dem die Lösung existiert.

Aufgabe 3. Berechnen Sie das Volumen der Menge

$$K := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\ x,y,z \geq 0,\ x+y+z \leq 2,\ x^2+y^2 \leq 1\}.$$

Aufgabe 4. Sei $G := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ 0 < y \leq x,\ 1 \leq x+y \leq 2\}$. Berechnen Sie das Integral

$$\int_G \frac{x+y}{x^2} d(x,y).$$

Hinweis: Die Funktion $g : (0,\infty)^2 \to (0,\infty)^2, (u,v) \mapsto (\frac{u}{1+v}, \frac{uv}{1+v})$ ist ein Diffeomorphismus.

Aufgabe 5. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist niemals eine Nullmenge.
(b) Ist $A \subset \mathbb{R}$ eine Nullmenge, so ist auch der Abschluss $\overline{A}$ eine Nullmenge.

Aufgabe 6. Gegeben sei die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch

$$f_n : (0,\infty) \to (0,\infty), \quad x \mapsto \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{\sqrt{x}}.$$

Berechnen sie die Integrale

$$\int_{(0,\infty)} f_n(x)dx \quad \text{sowie} \quad \int_{(0,\infty)} \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx.$$

Hinweis: Sie dürfen benutzen, dass $\int_{(0,\infty)} f_1(x)dx = \sqrt{\pi}$.

Aufgabe 7. Sei $A \subset \mathbb{R}^n$. Wie ist der Raum $L^p(A)$ definiert? Für welche $a \in \mathbb{R}$ liegt die konstante Funktion

$$f_a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto a$$

in $L^1(\mathbb{R}^n)$? Sei $p > 1$. Für welche $a \in \mathbb{R}$ liegt f_a in $L^p(\mathbb{R}^n)$? Geben Sie ein Beispiel für zwei Lebesgue-integrierbare Funktionen f und g, so dass $f = g$ fast überall aber $f \not\equiv g$.

Aufgabe 8. Finden Sie eine holomorphe Funktion

$$f : z = (x + iy) \mapsto u(x + iy) + iv(x + iy),$$

$u(z), v(z) \in \mathbb{R}$ für alle $z \in \mathbb{C}$, für welche $u(x + iy) = x^3 - 3xy^2$.

Aufgabe 9. Gegeben seien $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto n\chi_{[\frac{1}{n},\frac{2}{n}]}(x)$.

(a) Gegen welche Funktion f konvergiert die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

(b) Konvergiert die Folge monoton?

(c) Gilt $\lim_{n\to\infty} \left(\int_{\mathbb{R}} f_n\right) = \int_{\mathbb{R}} (\lim_{n\to\infty} f_n)$?

Aufgabe 10. Sei M die Menge aller Punkte, die innerhalb der Sphäre $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3)|\ x^2+y^2+z^2 = z\}$ und oberhalb des Kegels $\{(x, y, z)|\ x^2+y^2 = z^2,\ z \geq 0\}$ liegen. Berechnen Sie das Volumen von M.