Analysis III
Serie 10

1. Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ Gebiet, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph und f' stetig. Zeigen Sie, dass f konstant ist, falls eine der folgenden Bedingungen gilt:

   (a) $f'(z) = 0$ für alle $z \in \Omega$;

   (b) $\operatorname{Re} f$ ist konstant;

   (c) $\operatorname{Im} f$ ist konstant.

2. Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ Gebiet und sei $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine auf jeder kompakten Teilmenge von Ω gleichmäßig konvergente Folge holomorpher Funktionen. Es sei f_k' stetig für alle $k \in \mathbb{N}$. Sei $f = \lim_{k\to\infty} f_k$. Zeigen Sie, dass auch f holomorph ist und dass (f_k') auf jeder kompakten Teilmenge von Ω gleichmäßig gegen f' konvergiert. Zeigen Sie durch ein Beispiel, dass die entsprechende Aussage für stetig differenzierbare Funktionen $f_k : I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$ Intervall, im Allgemeinen nicht gilt.

   Hinweis. Benutzen Sie die Cauchysche Integralformel.

3. Berechnen Sie das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$, indem Sie die Funktion
$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$$
einmal in kartesischen Koordinaten und einmal in Polarkoordinaten über $\mathbb{R}^2$ integrieren.

4. Berechnen Sie die uneigentlichen Integrale
$$\int_0^\infty \cos(t^2)\, dt \quad \text{und} \quad \int_0^\infty \sin(t^2)\, dt\ ,$$
indem Sie für $R > 0$ die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(x) = \exp(-\frac{1}{2}z^2)$ über den Rand des Dreiecks mit den Ecken $0, R$ und $R + iR$ integrieren und dann den Grenzwert für $R \to \infty$ betrachten.

Die Lösungen sind bis Montag, den 25.01.2010, 14:00 Uhr, im Fach des jeweiligen Übungsleiters abzugeben.