Prof. Dr. W. Bergweiler WS 2009/10

Analysis III
Serie 8

1. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ integrierbar. Es existiere eine Konstante $C > 0$ mit $|f(x)| \leq Ce^{-|x|}$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass durch
$$g(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(y) e^{-ixy} dy$$
eine beliebig oft differenzierbare Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definiert wird. Berechnen Sie auch die Ableitungen von g.

2. Sei $R_2 > R_1 > 0$ und sei
$$K := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (R_1)^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq (R_2)^2, z \geq \sqrt{x^2 + y^2} \right\}.$$
Bestimmen Sie das Volumen und den Schwerpunkt von K.

   Hinweis. Verwenden Sie Kugelkoordinaten.

3. Durch eine Kugel vom Radius $R > 0$ wird durch ein Loch vom Radius $\frac{1}{2}R$ gebohrt. Der Rand des Bohrlochs verlaufe durch den Mittelpunkt der Kugel. Berechnen Sie das Volumen des ausgebohrten Teils der Kugel.

   Hinweis. Verwenden Sie Zylinderkoordinaten (mit einer Bohrung parallel zur z-Achse).

4. Sei $R > 0$ und $U := (0, R) \times (-\pi, \pi) \times (-\pi, \pi) \subset \mathbb{R}^3$. Sei $T : U \to \mathbb{R}^3$,
$$T(t, \varphi, \theta) = ((R + t\cos\theta)\cos\varphi, (R + t\cos\theta)\sin\varphi, t\sin\theta).$$
Zeigen Sie, dass T injektiv ist. (Sie dürfen benutzen, dass die Polarkoordinatenabbildung $P : (0, \infty) \times (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}^2$, $(r, \phi) \mapsto (r\cos\phi, r\sin\phi)$ injektiv ist.)
   Sei $0 < r < R$ und $H = (0, r] \times [-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi] \times [-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$. Fertigen Sie eine (grobe) Skizze von $T(H)$ an und bestimmen Sie das Volumen von $T(H)$.

Die Lösungen sind bis Montag, den 11.1.2010, 14:00 Uhr, im Fach des jeweiligen Übungsleiters abzugeben.