Analysis III
Serie 7

1. Sei $A \subset \mathbb{R}^d$ messbar und $f : A \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ integrierbar. Zeigen Sie, dass für jedes $c \in \mathbb{R}$ die Menge $A_c = \{x \in A : f(x) \geq c\}$ messbar ist.

   Hinweis. Konstruieren Sie zunächst eine messbare Funktion $g : A \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = 1$ für $x \in A_c$ und $0 \leq g(x) < 1$ für $x \in A \setminus A_c$. Betrachten Sie dann die Folge (g^k).

2. Die Gammafunktion $\Gamma : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ ist durch

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$$

   definiert. Zeigen Sie, dass Γ differenzierbar ist.

3. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ lokal integrierbar und es existiere das iterierte Integral

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x,y)| dy \right) dx \ .$$

   Zeigen Sie, dass f integrierbar ist.

   Hinweis. Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist f über $W_n = [-n, n]^2$ integrierbar.

4. Für welche $s \in \mathbb{R}$ ist die durch

$$f(x,y) = \frac{1}{(1 + |x| + |y|)^s}$$

   gegebene Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ integrierbar? Berechnen Sie für diese s das Integral

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y) d(x,y).$$

Die Lösungen sind bis Montag, den 14.12.2009, 14:00 Uhr, im Fach des jeweiligen Übungsleiters abzugeben.