Prof. Dr. W. Bergweiler WS 2009/10

Analysis III
Serie 6

1. Sei (g_k) eine Folge integrierbarer Funktionen mit $\sum_{k=1}^{\infty} \|g_k\|_1 < \infty$.

   Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} g_k$ fast überall gegen eine integrierbare Funktion konvergiert und dass
   $$\int_{\mathbb{R}^d} \left(\sum_{k=1}^{\infty} g_k(x) \right) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^d} g_k(x) dx$$
   gilt.

2. Sei $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$,
   $$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) & \text{falls } x \neq 0, \\ 0 & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$
   Zeigen Sie, dass f differenzierbar ist, aber f' nicht integrierbar ist.

3. Berechnen Sie
   $$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{\sqrt{n}\cos(x^2)}{1+nx^2} dx \ .$$
   Hinweis. Substituieren Sie $y = \sqrt{n}x$.

4. Sei (A_k) eine Folge messbarer Teilmengen des $\mathbb{R}^d$ mit $A_{k+1} \subset A_k$ für $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass
   $$A = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$$
   messbar ist und
   $$v(A) = \lim_{k\to\infty} v(A_k)$$
   gilt.

Die Lösungen sind bis Montag, den 7.12.2009, 14:00 Uhr, im Fach des jeweiligen Übungsleiters abzugeben.