Analysis III
Serie 5

1. Zeigen Sie, dass die durch $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ gegebene Funktion für $p > 1$ in $L^p(\mathbb{R})$ liegt.

2. Sie $K \subset \mathbb{R}^3$ kompakt. Es sei J_z das Trägheitsmoment von K bzgl. der z-Achse. Sei g eine Gerade durch den Schwerpunkt von K, die parallel zur z-Achse ist, und sei d der Abstand des Schwerpunkts von der z-Achse.

   Zeigen Sie, dass
   $$J_g = J_z - v(K)d^2$$
   gilt.

3. Seien $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Zeigen Sie, dass $f \cdot \overline{g} \in L^1(\mathbb{R}^d)$ und dass durch
   $$\langle f, g \rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^d} f(x)\overline{g(x)}dx$$
   ein Skalarprodukt auf $L^2(\mathbb{R}^d)$ definiert wird.

4. Sei $r : [a, b] \to (0, \infty)$ stetig und sei
   $$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq r(z)^2, a \leq z \leq b\} \ .$$
   Zeigen Sie, dass K messbar ist und
   $$v(K) = \pi \int\limits_a^b r(z)^2 dz$$
   gilt.

   Benutzen Sie die Formel, um das Volumen eines Kegels der Höhe h zu berechnen, dessen Grundfläche ein Kreis mit Radius R ist.

Die Lösungen sind bis Montag, den 30.11.2009, 14:00 Uhr, im Fach des jeweiligen Übungsleiters abzugeben.