

Analysis III
Serie 4

1. Durch eine Kugel vom Radius R wird ein Loch vom Radius r gebohrt. Dabei sei $0 < r < R$. Der Mittelpunkt der Kugel sei auch der Mittelpunkt des Bohrlochs. Berechnen Sie das Volumen des verbleibenden Teils der Kugel.
2. Sei $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{x}}.$$

Zeigen Sie, dass das uneigentliche Riemann-Integral

$$\int_1^{\infty} f(x) dx$$

existiert, aber das Lebesgue-Integral

$$\int_{[1, \infty)} f(x) dx$$

nicht existiert.

Definition. Eine Funktion $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ heißt *halbstetig von unten*, falls für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ die Menge $\{x \in \mathbb{R}^d : f(x) > \alpha\}$ offen ist.

3. Zeigen Sie, dass jede nicht-negative, von unten halbstetige Funktion die Grenzfunktion einer monoton wachsenden Folge von Treppenfunktionen ist.
4. Sei $A \subset \mathbb{R}^p$ Nullmenge und sei $B \subset \mathbb{R}^q$. Zeigen Sie, dass $A \times B$ Nullmenge (im \mathbb{R}^{p+q}) ist.

Die Lösungen sind bis Montag, den 23.11.2009, 14:00 Uhr, im Fach des jeweiligen Übungsleiters abzugeben.