Analysis III
Serie 3

1. Beweisen Sie Lemma 1.2.8 der Vorlesung.

Definition: Sei $K \subset \mathbb{R}^d$ kompakt. Der Schwerpunkt $s = (s_1, \ldots, s_d)$ von K ist definiert durch

$$s_k = \frac{1}{v(K)} \int_K x_k \, dx, \quad k = 1, \ldots, d \, .$$

Dabei ist $v(K) = \int_K 1 dx = \int_{\mathbb{R}^d} \chi_K(x) dx$ das Volumen von K.

2. Berechnen Sie den Schwerpunkt der Halbkugel $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, \ z \geq 0\}$.

Definition: Sei $K \subset \mathbb{R}^3$ kompakt und sei $g \subset \mathbb{R}^3$ Gerade. Für $x \in \mathbb{R}^3$ sei $d(x, g)$ der Abstand von x zu g, d.h.,

$$d(x, g) = \inf_{y \in g} \|x - y\| \, .$$

Dann heißt

$$J_g = \int_K d(x, g)^2 dx$$

das *Trägheitsmoment* von K bezüglich der Geraden g.

3. Sei K der Tetraeder mit den Ecken $(0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0)$ und $(0, 0, 1)$. Berechnen Sie das Trägheitsmoment von K bzgl. der z-Achse.

4. Sei $K \subset \mathbb{R}^2$ der Schnitt der abgeschlossenen Kreisscheiben vom Radius 1 um die Punkte $(0, 0)$ und $(1, 1)$. Sei $f : K \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x$. Berechnen Sie

$$\int_K f(x, y) \, d(x, y) \, .$$

Die Lösungen sind bis Montag, den 16.11.2009, 14:00 Uhr, im Fach des jeweiligen Übungsleiters abzugeben.