

**Übungen zu
Analysis II und Lineare Algebra Ib für Physiker
Serie 6**

1. Sei V Skalarproduktraum und W Teilraum von V . Zeigen Sie:
 - a) $W \subset (W^\perp)^\perp$
 - b) Ist V endlich-dimensional, so gilt $W = (W^\perp)^\perp$.
 - c) Sei V der Vektorraum aller stetig differenzierbaren, 2π -periodischen Funktionen von \mathbb{R} nach \mathbb{R} , mit dem Skalarprodukt $\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$. Sei W der Teilraum der trigonometrischen Polynome. Zeigen Sie, dass $W^\perp = \{0\}$ und $(W^\perp)^\perp = V$. (Insbesondere gilt also $(W^\perp)^\perp \neq W$.)

2. Sei V endlichdimensionaler Skalarproduktraum, W Teilraum von V und $v \in V$. Zeigen Sie:
 - a) $S_W(v) = v - 2P_{W^\perp}(v)$,
 - b) $S_W(S_{W^\perp}(v)) = -v$.

3. Sei V normierter Raum und W Teilraum von V . Zeigen Sie:
 - a) \overline{W} ist Teilraum.
 - b) Ist $W \neq V$, so ist $\overset{\circ}{W} = \emptyset$.
 - c) Ist V Skalarproduktraum, so ist W^\perp abgeschlossen.

4. Sei V normierter Raum und $M \subset V$. Zeigen Sie:
 - a)

$$\overline{M} = \bigcap_{\substack{N \supset M \\ N \text{ abgeschlossen}}} N,$$
 - b)

$$\overset{\circ}{M} = \bigcup_{\substack{N \subset M \\ N \text{ offen}}} N.$$

5. Bestimmen Sie \overline{M} , $\overset{\circ}{M}$, ∂M und $\overline{\overset{\circ}{M}}$ für die folgenden Mengen M :
 - a) $M = (0, 1] \times [2, 3] \times [4, 5) \subset \mathbb{R}^3$
 - b) $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 2, y \geq x \text{ und } y \leq |x|\}$

Abgabe: Mittwoch, 4.6., und Donnerstag, 5.6., in der Übung.