b) Sei $a = -1$, $b = 1$, $w(x) = \sqrt{1-x^2}$ und $< f, g >$ das Skalarprodukt aus a). Sei $f_n(x) = x^n$ für $x \in [-1,1]$ und $n \in \mathbb{N}_0$. Nach dem Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahren existiert ein Orthonormalsystem $g_0, g_1, g_2, \ldots$ mit $\text{span}(g_0, \ldots, g_n) = \text{span}(f_0, \ldots, f_n)$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Bestimmen Sie g_0, g_1 und g_2.

Bemerkung: Die g_k aus b) heißen Chebychevsche Polynome 2. Art.

4. Sei $f \in R[-\pi, \pi]$ und F Stammfunktion von f. Zeigen Sie, dass

$$a_k(F) = -\frac{1}{k}\, b_k(f)$$

und

$$b_k(F) = \frac{(-1)^{k+1}}{k} a_0(f) + \frac{1}{k} a_k(f).$$

Zeigen Sie auch, dass $a_0(f) = 0$ falls F eine 2π-periodische Fortsetzung auf $\mathbb{R}$ hat.

5. Berechnen Sie die Fourierreihe von $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R},\ f(x) = e^{|x|}$.

Abgabe: Di, 27.5 in der Vorlesung oder 28.5. in der Übung