

Übungen zu Analysis II und Lineare Algebra Ib

Blatt 9

Aufgabe 1

Man bestimme die Eigenwerte und Eigenräume von

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

- (a) über \mathbb{R} ,
- (b) über \mathbb{C} .

Aufgabe 2

Sei K Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $A \in M(n \times n, K)$. Zeigen Sie:

- (a) $p_{A^T}(x) = p_A(x)$.
- (b) Ist A invertierbar, so gilt

$$p_{A^{-1}}(x) = \frac{(-x)^n}{\det A} p_A\left(\frac{1}{x}\right).$$

Aufgabe 3

Sei $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + 2\sqrt{3x^2 + y^2} \\ 2y \end{pmatrix}$ und

$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} v^2 - 4u^2 \\ u \cdot v \end{pmatrix}$. Sei $F = f \circ g$. Berechnen Sie $J_F(1, 1)$ einmal direkt und einmal mit Hilfe der Kettenregel.

Aufgabe 4

Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \arctan(x - y) \\ x + \sin(x + y) \end{pmatrix}$.

Zeigen Sie, dass

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \sqrt{7} \|b - a\|$$

für $a, b \in \mathbb{R}^2$.

Aufgabe 5

Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = e^{x+y} \cos x$.

Berechnen Sie die Taylorpolynome $T_1((x, y), f, 0)$ und $T_2((x, y), f, 0)$ und schätzen Sie das Restglied $R_1(x, y)$ für $\|(x, y)\| \leq \frac{1}{10}$ ab.

Abgabe: Mittwoch, den 2.7., und Donnerstag, den 3.7., in den Übungen.