Übungen zu Analysis II und Lineare Algebra Ib

Blatt 8

Aufgabe 1

Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenräume von

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix},$$

wobei $0 < \alpha < 2\pi$.

Aufgabe 2

Sei $A = (a_{ij}) \in M(m \times n, \mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass

$$\|Av\| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2} \cdot \|v\|$$

für alle $v \in \mathbb{R}^n$ gilt. Hierbei bezeichne $\|\cdot\|$ die euklidische Norm auf $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{R}^m$.

Aufgabe 3

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und $f, g \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$. Sei $h : \Omega \to \mathbb{R}$ definiert durch $h(x) =< f(x), g(x) >$. Zeigen Sie, dass $h \in C^1(\Omega)$ und dass grad $h(x) = g(x) \cdot J_f(x) + f(x) \cdot J_g(x)$ für $x \in \Omega$.

Aufgabe 4

Seien $\Omega, \Omega' \subset \mathbb{R}^n$, $f : \Omega \to \Omega'$ bijektiv und f und f^{-1} seien differenzierbar. Zeigen Sie, dass

$$J_f(x)^{-1} = J_{f^{-1}}(f(x))$$

für $x \in \Omega$.

Definition. Für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n) \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ heißt

$$\text{div } f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}$$

die Divergenz von f. Ist $n = 3$, so heißt

$$\text{rot } f = \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}, \frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}, \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right)$$

die Rotation von f.

Aufgabe 5

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, $f \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$ $g \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$. Zeigen Sie

a) rot (grad f) $= 0$

b) div (rot g) $= 0$

c) div $(f \cdot g) =<$ grad $f, g > + f \cdot$ div g.

Abgabe: Mittwoch, den 25.6., und Donnerstag, den 26.6., in den Übungen.