Übungen zu Analysis II und Lineare Algebra Ib
Blatt 7

Aufgabe 1

Eine Matrix $A \in M(n \times n, K)$ heißt nilpotent, falls $k \in \mathbb{N}$ mit $A^k = 0$ existiert.

a) Zeigen Sie, dass nilpotente Matrizen den Eigenwert $\lambda = 0$, aber keine anderen Eigenwerte haben.

b) Zeigen Sie, dass

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

nilpotent ist und bestimmen Sie $N_0(A)$.

Aufgabe 2

Seien V, W normierte Räume und $\varphi : V \to W$ linear. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

a) φ ist stetig,

b) φ ist stetig in 0,

c) es existiert eine Konstante $K \geq 0$ mit $\|\varphi(v)\| \leq K\|v\|$ für alle $v \in V$.

Aufgabe 3

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig, $M = \{(x, y) : y \leq f(x)\} \subset \mathbb{R}^2$.

a) Zeigen Sie, dass $\partial M = \{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}\}$.

b) Zeigen Sie, dass die Aussage von a) für unstetiges f nicht gelten muss.

Aufgabe 4

Sei V normierter Raum und $A, B \subset V$ kompakt.

a) Zeigen Sie, dass $A + B = \{a + b : a \in A,\ b \in B\}$ kompakt ist.

b) Zeigen Sie, dass $a_0 \in A$ und $b_0 \in B$ existieren, so dass $\|a_0 - b_0\| \leq \|a - b\|$ für alle $a \in A$ und $b \in B$.

Bemerkung: Die entsprechenden Aussagen für A, B abgeschlossen gelten nicht, selbst wenn $V = \mathbb{R}$.

Aufgabe 5

Sei $V = C^1[a, b],\ W = C[a, b]$ und $\varphi = V \to W,\ \varphi(f) = f'$.

a) Zeigen Sie, dass φ nicht stetig ist, wenn man auf V und W die Norm $\|\cdot\|_\infty$ betrachtet (wobei $\|f\|_\infty = \max\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|$).

b) Zeigen Sie, dass durch

$$\|f\|' := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$$

eine Norm auf V gegeben ist.

c) Zeigen Sie, dass φ stetig ist, wenn man auf V die Norm $\|\cdot\|'$ zu Grunde legt (und auf W die Norm $\|\cdot\|_\infty$).

Abgabe: Mittwoch, den 11.6., und Donnerstag, den 12.6., in den Übungen.