Übungen zu
Analysis II und Lineare Algebra Ib für Physiker
Serie 4

1. Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei P_n der Vektorraum der Polynome vom Grad $\leq n$. Weiter sei $\varphi : P_n \to P_n$, $p(x) \mapsto x \cdot p'(x) + p''(x)$. Berechnen Sie $\det \varphi$.

2. Zeigen Sie, dass in den folgenden Fällen durch $\langle \, , \, \rangle$ ein Skalarprodukt auf V gegeben ist.

   a) $V = M(n \times n, \mathbb{R})$, $\langle A, B\rangle = \mathrm{Sp}(AB^T)$, wobei $\mathrm{Sp}(C) = \sum_{i=1}^n c_{ii}$ für $C = (c_{ij}) \in M(n \times n, \mathbb{R})$. (Man nennt $\mathrm{Sp}(C)$ die Spur von C.) Berechnen Sie auch $||A||$.

   b) $V = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} : a_n \in \mathbb{K}, \sum_{n=1}^\infty |a_n|^2 \text{ konvergiert } \}$, $\langle (a_n), (b_n)\rangle = \sum_{n=1}^\infty a_n \overline{b}_n$.

3. Zeigen Sie, dass für $k, j \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \sin jx \, dx = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos jx \, dx = \begin{cases} 0 & \text{für } k \neq j \\ \pi & \text{für } k = j \neq 0 \\ 2\pi & \text{für } k = j = 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin jx \, dx = \begin{cases} 0 & \text{für } k \neq j \\ \pi & \text{für } k = j \neq 0 \\ 0 & \text{für } k = j = 0 \end{cases}$$

4. Berechnen Sie die folgenden Integrale:

   a) $\displaystyle\int_2^3 \frac{25}{x^4 + 2x^3 + 5x^2} dx$

   b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{6 \cos x}{5 + 3 \cos x} dx.$

5. a) Welche der folgenden uneigentlichen Integrale konvergieren?

(i) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$

(ii) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\arctan x}{x\sqrt{x}}dx$

b) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ konvergiert die Reihe

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \cdot (\ln k)^\alpha} \quad ?$$

Abgabe: Mi, 14.5. bzw. Do., 15.5. in den Übungen