Übungen zu
Analysis II und Lineare Algebra Ib für Physiker
Serie 3

1. Sei $A_n = (a_{ij}) \in M(n \times n, \mathbb{R})$ mit $a_{i,i} = 1$, $a_{i,i+1} = 1$, $a_{i,i-1} = -1$. $a_{i,j} = 0$ sonst, also z.B.

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Zeigen Sie für $n \geq 3$: $\det A_n = \det A_{n-1} + \det A_{n-2}$.

2. Man berechne die folgenden Integrale:

   (a) $\displaystyle\int_0^\pi x^2 \sin x \, dx$

   (b) $\displaystyle\int_1^e (\ln x)^2 \, dx$

   (c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{(\cos x)^2} \, dx.$

3. Man berechne die folgenden Integrale:

   (a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}} \, dx$

   (b) $\displaystyle\int_1^3 \arctan \sqrt{x} \, dx$

   (c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{(\cos x^2)^2} \, dx$

4. Berechnen Sie die folgenden Stammfunktionen:

   (a) $\displaystyle\int \exp \sqrt[3]{x}\, dx$

   (b) $\displaystyle\int e^x \cdot \sin 2x\, dx$

   (c) $\displaystyle\int (\cosh x)^2\, dx$

5. Sei $\alpha \in \mathbb{R}$, $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^\alpha$, $n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie für das Restglied R_n der Taylorentwicklung von f um $x_0 = 1$ die Abschätzung

$$|R_n(x)| \leq \left| \binom{\alpha - 1}{n} (1 - x)^n (1 - x^\alpha) \right| \text{ falls } 0 < x < 1.$$

   Hinweis: Es gilt $f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha - 1) \cdots (\alpha - k + 1) x^{\alpha - k} = k! \binom{\alpha}{k} x^{\alpha - k}$.

Abgabe: Mi, 7.5. bzw. Do., 8.5. in den Übungen