

**Übungen zu
Analysis II und Lineare Algebra Ib für Physiker
Serie 1**

1. Sei $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$,
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ 2x_2 \\ 3x_3 - x_1 \end{pmatrix}$$

und sei

$$\mathfrak{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Zeigen Sie, dass \mathfrak{B} eine Basis von \mathbb{R}^3 ist.

Sei $\mathfrak{E} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ die Standardbasis des \mathbb{R}^3 .

Berechnen Sie die Basiswechselmatrizen $S_{\mathfrak{E}}^{\mathfrak{B}}$ und $S_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{E}}$ sowie die Matrizen $(M_{\mathfrak{E}}^{\mathfrak{E}})_{\varphi}$ und $(M_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}})_{\varphi}$.

2. Seien $T_1, T_2 : M(2 \times 2, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$T_1 \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) = ab + cd$$

und

$$T_2 \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) = ac + bd.$$

Welche der Abbildungen T_1, T_2 ist multilinear ?

3. Für $n \in \mathbb{N}$ sei Z_n die durch $Z_n = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1\}$ gegebene Zerlegung des Intervalls $[0, 1]$. Berechnen Sie die Unter- und Obersummen $U(\exp, Z_n)$ und $O(\exp, Z_n)$. Zeigen Sie, dass $\exp : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar ist und berechnen Sie $\int_0^1 \exp(x) dx$.

4. Sei Z_n wie in Aufgabe 3 und $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ monoton wachsend. Zeigen Sie, dass

$$O(f, Z_n) - U(f, Z_n) = \frac{f(1) - f(0)}{n}$$

Folgern Sie, dass f integrierbar ist.

5. Sei Z Zerlegung des Intervalls $[a, b]$ und seien f und g beschränkte Funktionen von $[a, b]$ nach \mathbb{R} . Zeigen Sie, dass

$$O(f + g, Z) \leq O(f, Z) + O(g, Z)$$

und

$$\overline{\int_a^b (f + g)} \leq \overline{\int_a^b f} + \overline{\int_a^b g}.$$

Abgabe: Mi, 16.4. bzw. Do, 17.4.03 in den Übungen