Prof. Dr. W. Bergweiler Sommersemester 2012

Analysis II
Serie 8

1. Es sei
$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4+y^2}, & \text{falls } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{falls } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$
Zeigen Sie, dass sämtliche Richtungsableitungen von f in $(0,0)$ existieren, aber f in $(0,0)$ nicht stetig ist.

2. Seien $p, q \in \mathbb{N}, U \subset \mathbb{R}^p$ offen, $\xi \in U$ und $f, g : U \to \mathbb{R}^q$. Sei $h : U \to \mathbb{R}, h(x) = \langle f(x), g(x) \rangle$. Die partiellen Ableitungen der Koordinatenfunktionen von f und g in ξ mögen existieren. Zeigen Sie, dass auch die partiellen Ableitungen von h in ξ existieren und dass
$$\operatorname{grad} h(\xi) = g(\xi)^T J_f(\xi) + f(\xi)^T J_g(\xi)$$
gilt.

3. Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 2$ und
$$f : \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{\|x\|_2^{n-2}}.$$
Zeigen Sie, dass f zweimal partiell differenzierbar ist und für alle $x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ gilt:
$$\sum_{j=1}^{n} \partial_j^2 f(x) = 0.$$

4. Es sei
$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto \begin{cases} x^2 \dfrac{x-y}{x^2+y^2}, & \text{falls } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{falls } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$
   (a) Zeigen Sie, dass f partiell differenzierbar ist.
   (b) Untersuchen Sie die partiellen Ableitungen von f auf Stetigkeit.
   (c) Untersuchen Sie die Existenz der zweiten partiellen Ableitungen von f in $(0,0)$.

Abgabe bis Mittwoch, 13.06.2012, im Fach des Übungsleiters.