Prof. Dr. W. Bergweiler Sommersemester 2012

Analysis II
Serie 7

1. Seien $p, q \in \mathbb{N}$. Die Vektorräume $\mathbb{R}^p$ und $\mathbb{R}^q$ seien mit der Norm $\|\cdot\|_1$ versehen. Sei

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & & \\ a_{q1} & \dots & a_{qp} \end{pmatrix}$$

eine reelle $(q \times p)$-Matrix und $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q,\ f(x) = Ax$. Berechnen Sie die Operatornorm von f.

2. Seien $(M, d_M), (N, d_N)$ metrische Räume und sei $f : M \to N$ bijektiv und stetig. Weiter sei M kompakt. Zeigen Sie, dass f^{-1} stetig ist.

   Zusatz: Zeigen Sie, dass auf die Voraussetzung der Kompaktheit von M nicht verzichtet werden kann.

3. Gegeben sei der normierte Raum $(C[-1, 1], \|\cdot\|_\infty)$ und die Teilmenge $M_1 := C^1[-1, 1]$ sowie die Teilmenge M_2, die aus den Funktionen der Form $x \mapsto ax + b$ mit $a, b \in [-1, 1]$ besteht. Untersuchen Sie, ob die Mengen M_1 und M_2 offen, abgeschlossen, kompakt, beschränkt, totalbeschränkt oder zusammenhängend sind.

Definition: Seien $(M, d_M), (N, d_N)$ metrische Räume. Eine Abbildung $f : M \to N$ heißt *Homöomorphismus*, wenn f bijektiv und f und f^{-1} stetig sind. Die Räume M und N heißen dann *homöomorph*.

4. Sei $S^1 := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Zeigen Sie, dass S^1 nicht homöomorph zu einem Intervall ist.

Abgabe bis Mittwoch, 06.06.2012, im Fach des Übungsleiters.
Aufgabe 4 ist vor allem für 1-Fach-BSc gedacht.