Prof. Dr. W. Bergweiler Sommersemester 2012

Analysis II
Serie 5

1. Seien (M, d_M) und (N, d_N) metrische Räume. Durch welche der folgenden Abbildungen $d_1, d_2, d_3 : M \times N \to [0, \infty)$ wird eine Metrik auf $M \times N$ definiert:

   (a) $d_1((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = d_M(x_1, x_2) + d_N(y_1, y_2)$,

   (b) $d_2((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = d_M(x_1, x_2) \cdot d_N(y_1, y_2)$,

   (c) $d_3((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = d_M(x_1, x_2) + d_N(y_1, y_2) + d_M(x_1, x_2) \cdot d_N(y_1, y_2)$?

   Dabei seien $x_1, x_2 \in M$ und $y_1, y_2 \in N$.

2. Sei (M, d) vollständiger metrischer Raum und sei $f : M \to M$. Es existiere $c \in (0, 1)$, so dass für alle $x, y \in M$
$$d(f(x), f(y)) \le c \cdot d(x, y)$$
   gilt. Zeigen Sie, dass f genau einen Fixpunkt besitzt, d.h., es existiert genau ein $\xi \in M$ mit $f(\xi) = \xi$.

   Hinweis: Man zeige, dass für $x_1 \in M$ die durch $x_n = f(x_{n-1})$ definierte Folge (x_n) eine Cauchy-Folge ist.

3. Es sei
$$\|\cdot\| : C^1([0, 1]) \to [0, \infty), f \mapsto \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty.$$
   Zeigen Sie, dass gilt:

   (a) $\|\cdot\|$ ist eine Norm auf $C^1([0, 1])$.

   (b) Der Raum $(C^1([0, 1]), \|\cdot\|)$ ist vollständig.

   (c) Die durch
$$f_n(x) := \frac{1}{n} \sin(nx)$$
   definierte Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $C^1([0, 1])$ konvergiert bezüglich $\|\cdot\|_\infty$ gegen 0, aber nicht bezüglich $\|\cdot\|$.

4. Es sei l_2 die Menge aller Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}$, für die die Reihe $\sum_{n=1}^\infty |x_n|^2$ konvergiert.

   (a) Zeigen Sie, dass für alle $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l_2$ auch die Reihe $\sum_{n=1}^\infty |x_n y_n|$ konvergiert.

   (b) Zeigen Sie, dass l_2 (versehen mit der komponentenweisen Addition und Skalarmultiplikation) ein Untervektorraum des $\mathbb{C}$-Vektorraumes aller Folgen in $\mathbb{C}$ ist.

   (c) Zeigen Sie, dass durch
$$\langle (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \rangle \mapsto \sum_{n=1}^\infty x_n \overline{y_n}$$
   ein Skalarprodukt auf l_2 definiert wird.

   (d) **Zusatz:** Zeigen Sie, dass $(l_2, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ vollständig (also ein Hilbert-Raum) ist.

Abgabe bis Mittwoch, 17.05.2012, im Fach des Übungsleiters.
Aufgabe 4 ist vor allem für 1-Fach-BSc gedacht.