Prof. Dr. W. Bergweiler SS 2012

Analysis II
Serie 3

1. Berechnen Sie die Integrale

$$\int_1^4 \exp(\sqrt{x})\,dx, \qquad \int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x\,dx \qquad \text{und} \qquad \int_0^2 \frac{1-e^{-x}}{1+e^x}\,dx.$$

2. Berechnen Sie die folgenden, Schulbüchern entnommenen Integrale:

$$\int_1^{-\ln 2} \frac{e^{4x}}{e^{2x}+3}\,dx, \qquad \int_e^{e^2} \frac{4}{x\ln x}\,dx \qquad \text{und} \qquad \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} \frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}}.$$

3. Seien $a, b \in \mathbb{R},\ a < b$. Für $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sei

$$K(f) = \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right).$$

Zeigen Sie:

(a) Ist f Polynom vom Grad höchstens 3, so gilt

$$K(f) = \int_a^b f(x)\,dx$$

(b) Berechnen Sie $\int_a^b f(x)\,dx$ und $K(f)$ sowie den numerischen Wert von

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - K(f)\right|$$

für $f : [1,4] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \exp(\sqrt{x})$.

Bemerkung. Die beschriebene Regel zur Approximation von Integralen heißt „Keplersche Fassregel" und wird auch in Schulbüchern behandelt.

Definition. Sei K Körper. Eine Funktion $f : K^2 \to K$ der Form

$$f(x,y) = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} a_{ij} x^i y^j$$

mit $m, n \in \mathbb{N}_0$ und $a_{ij} \in K$ für alle i und j heißt *Polynom* (in zwei Veränderlichen). Ein Quotient von Polynomen - definiert dort, wo der Nenner nicht verschwindet - heißt *rationale Funktion.*

4. (a) Sei R rationale Funktion in zwei Veränderlichen. Zeigen Sie, dass das unbestimmte Integral

$$\int R(\sin x, \cos x)\, dx$$

durch die Substitution $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ in ein Integral der Form $\int S(t)dt$ mit einer rationalen Funktion S überführt werden kann.

(b) Berechnen Sie

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3 - \cos x}\, dx$$

.

Zusatz. Berechnen Sie

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{3 - \cos x}\, dx.$$

Hinweis zu a): Zeigen Sie zunächst, dass für $x \in (-\pi, \pi)$

$$\cos x = \frac{1 - \tan^2(\frac{x}{2})}{1 + \tan^2(\frac{x}{2})} \quad \text{und} \quad \sin x = \frac{2\tan(\frac{x}{2})}{1 + \tan^2(\frac{x}{2})}$$

gilt.

Abgabe bis Mittwoch, 02.05.2012, im Fach des Übungsleiters.
Aufgabe 4 ist vor allem für 1-Fach-BSc gedacht.