Prof. Dr. W. Bergweiler Sommersemester 2012

Analysis II
Serie 2

1. Sei I kompaktes Intervall und sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig. Es gelte $f(x) \geq 0$ für alle $x \in I$. Außerdem existiere $\alpha \in I$ mit $f(\alpha) > 0$. Zeigen Sie, dass

$$\int_I f(x)\, dx > 0.$$

Zeigen Sie außerdem, dass es nicht genügt, f nur als integrierbar vorauszusetzen.

Definition: Seien $M, N \subset \mathbb{C}$. Eine Funktion $f : M \to N$ heißt *Lipschitz-stetig*, wenn ein $L \geq 0$ existiert, so dass für alle $x, y \in M$ die Ungleichung $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$ gilt. Man bezeichnet L als *Lipschitz-Konstante*.

2. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante L. Sei Z Zerlegung von $[a, b]$ mit zugehörigen Stützstellen ξ. Zeigen Sie, dass

$$\overline{S}(f, Z) - \underline{S}(f, Z) \leq (b - a)L|Z|$$

und

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx - S(f, Z, \xi) \right| \leq (b - a)L|Z| \; .$$

3. Sei $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x \text{ irrational oder } x = 0, \\ \dfrac{1}{q} & \text{falls } x \text{ rational, } x = \dfrac{p}{q} \text{ mit } p, q \text{ teilerfremd.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f integrierbar ist, und berechnen Sie das Integral $\int_0^1 f(x)dx$.

Definition: Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und sei $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Dann heißt f *stückweise stetig*, wenn es eine Zerlegung $\{x_0, x_1, ..., x_n\}$ des Intervalls $[a, b]$ gibt, so dass für jedes $k \in \{1, 2, ..., n\}$ eine stetige Funktion $f_k : [x_{k-1}, x_k] \to \mathbb{C}$ mit $f_k(x) = f(x)$ für alle $x \in (x_{k-1}, x_k)$ existiert.

4. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stückweise stetig. Zeigen Sie, dass f integrierbar ist.

Abgabe bis Mittwoch, 25.04.2012, im Fach des Übungsleiters.
Aufgabe 4 ist vor allem für 1-Fach-BSc gedacht.