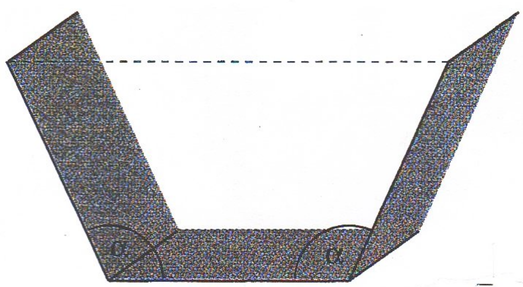
Prof. Dr. W. Bergweiler Sommersemester 2012

Analysis II
Serie 1

1. Lösen Sie folgende Schulbuchaufgabe:



Aus drei gleich breiten Brettern soll eine Rinne hergestellt werden, die oben offen ist. Fig. 2 zeigt einen Querschnitt dieser Rinne.
Wie ist der Winkel α zu wählen, damit das Fassungsvermögen der Rinne möglichst groß wird?

2. Berechnen Sie die Grenzwerte

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi - 2\arctan x}{\sin\left(\frac{1}{x}\right)} \quad \text{und} \quad \lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x^2 - x}\right)$$

mit Hilfe der Regeln von de l'Hospital.

3. Zeigen Sie, dass die Gleichung $e^{-x} = \ln x$ genau eine Lösung im Intervall $[1, e]$ hat und bestimmen Sie diese näherungsweise mit dem Newtonverfahren.

4. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = e^{\arctan x}$. Berechnen Sie das Taylorpolynom $T_2(x, f, 0)$ und zeigen Sie, dass das Restglied $R_2(x) = R_2(x, f, 0)$ für $x \in [-1, 1]$ der Abschätzung

$$|R_2(x)| \le \frac{11}{6}\exp\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot |x|^3$$

genügt.

5. Sei $a > 0$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a^x$. Für $n \in \mathbb{N}$ und $x > 0$ sei

$$Z_n := \left\{0, \frac{x}{n}, \frac{2x}{n}, \ldots, \frac{(n-1)x}{n}, x\right\} \quad \text{und} \quad \xi_n := \left(0, \frac{x}{n}, \frac{2x}{n}, \ldots, \frac{(n-2)x}{n}, \frac{(n-1)x}{n}\right).$$

Berechnen Sie $\lim_{n\to\infty} S(f, Z_n, \xi_n)$.

Abgabe bis Mittwoch, den 18.04.2012, 18.00 Uhr, im Fach des Übungsleiters.