Prof. Dr. W. Bergweiler SS 2012

Klausur zu Analysis II

im Studiengang 1-Fach-Bachelor Mathematik

02. Juli 2012

Für die Bearbeitung der folgenden 8 Aufgaben werden bei vollständig richtiger Bearbeitung jeweils 10 Punkte vergeben. Wer insgesamt 32 Punkte erreicht, hat die Klausur bestanden. Jede Aufgabe ist auf einem separaten Blatt zu bearbeiten. Jedes Blatt ist mit Matrikelnummer und Namen zu versehen.
Viel Erfolg!

Bearbeitungszeit: 2 Stunden und 40 Minuten

1. (a) Wie lautet das Integralkriterium für Reihen?
   (b) Wie ist die Operatornorm definiert?
   (c) Wie lautet die Kettenregel für totale Ableitungen?

2. Berechnen Sie folgende Integrale:

   (a) $\displaystyle\int_1^4 \sqrt{x}\ln(x)\,dx$

   (b) $\displaystyle\int_{1/4}^{3/4} \frac{\arcsin(\sqrt{x})}{\sqrt{1-x}\sqrt{x}}\,dx$

3. (a) Bestimmen Sie
$$\lim_{x\to\infty} \frac{\cos(\arctan x)}{\sin\left(\frac{1}{x}\right)} \quad .$$
   (b) Konvergiert das uneigentliche Integral
$$\int_1^\infty \frac{e^{\cos x}}{x^2}\,dx \ ?$$

4. Sei (M,d) metrischer Raum, K kompakte Teilmenge von M und U offene Teilmenge von M. Zeigen Sie, dass $K\setminus U$ kompakt ist.

5. Es sei

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x+y)^3}{\sqrt{x^4+y^6}}, & \text{falls } (x,y) \neq (0,0)\ , \\ 0, & \text{falls } (x,y) = (0,0)\ . \end{cases}$$

   (a) Untersuchen Sie, für welche $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ mit $\|v\|_2 = 1$ die Richtungsableitung $\partial_v f(0,0)$ existiert und bestimmen Sie diese gegebenenfalls.

   (b) Untersuchen Sie f auf Stetigkeit im Punkt $(0,0)$.

6. Sei $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy > -2\}$ und

$$f : U \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = 3\ln(2+xy) - x - y.$$

   Bestimmen Sie die lokalen Extrema von f.

   Bemerkung. Sie dürfen ohne Beweis benutzen, dass U offen ist.

7. Sei $T : C[0,1] \to C[0,1]$, $f \mapsto f^2$. Zeigen Sie, dass T bzgl. der Norm $\|\cdot\|_\infty$ stetig ist.

8. Sei $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ Hilbertraum über $\mathbb{R}$ und sei $T : H \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \langle x, x\rangle$. Zeigen Sie, dass T differenzierbar ist und bestimmen Sie $DT(x)(h)$ für $x, h \in H$.