Prof. Dr. W. Bergweiler SS 2012

2. Klausur zu Analysis II

im Studiengang 1-Fach-Bachelor Mathematik

08. Oktober 2012

Für die Bearbeitung der folgenden 8 Aufgaben werden bei vollständig richtiger Bearbeitung jeweils 10 Punkte vergeben. Wer insgesamt 32 Punkte erreicht, hat die Klausur bestanden. Jede Aufgabe ist auf einem separaten Blatt zu bearbeiten. Jedes Blatt ist mit Matrikelnummer und Namen zu versehen.
Viel Erfolg!

Bearbeitungszeit: 2 Stunden und 40 Minuten

1. Wie lautet
   (a) die Definition der Metrik?
   (b) die Cauchy-Schwarz-Ungleichung?
   (c) die Definition der Richtungsableitung?

2. Sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\ln(1+e^x)$. Berechnen Sie das Taylorpolynom $T_2(x,f,0)$ und zeigen Sie, dass für das Restglied $R_2(x)=R_2(x,f,0)$ für $x\in(0,\ln 2]$ die Abschätzung
$$|R_2(x)|\le\frac{1}{24}\,x^3$$
gilt.

3. (a) Berechnen Sie das Integral
$$\int_0^1 \ln(1+x^2)\,dx.$$
   (b) Untersuchen Sie das uneigentliche Integral
$$\int_0^1 \frac{\arcsin(e^{-x})}{\sqrt{x}}\,dx$$
   auf Konvergenz.

4. Berechnen Sie die Fourierreihe der 2π-periodischen Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\left|\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right|$ und untersuchen Sie die Reihe auch auf Konvergenz.

   Hinweis. Sie dürfen ohne Beweis benutzen, dass die zu den Termen $\sin(kx)$ gehörigen Koeffizienten $b_k(f)$ verschwinden, d.h., es gilt $b_k(f)=0$ für alle $k\in\mathbb{N}$.

Blatt bitte wenden

5. Sei M zusammenhängender metrischer Raum und sei X nichtleere Teilmenge von M. Es gelte $\partial X = \emptyset$. Zeigen Sie, dass $X = M$ gilt.

6. Berechnen Sie die lokalen Extrema der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,
$$f(x, y) = 10 \arctan(x + y) - 2x - y^2.$$

7. Sei $\varphi : [0, 1] \to [0, 1]$ stetig differenzierbar. Es existiere $\delta > 0$ mit $\varphi'(x) \geq \delta$ für alle $x \in [0, 1]$. Zeigen Sie, dass die lineare Abbildung $T : C[0, 1] \to C[0, 1]$, $T(f) = f \circ \varphi$, stetig bzgl. der Norm $\|\cdot\|_1$ auf $C[0, 1]$ ist.

   Hinweis. Die Linearität von T muss nicht gezeigt werden.

8. Sei $V = C[0, 1]$ und sei $U = \{f \in V : f(x) \neq 0 \text{ für alle } x \in [0, 1]\}$. Sei
$$\alpha : U \to V, \quad \alpha(f) = \frac{1}{f}\ .$$
   Zeigen Sie, dass α differenzierbar bzgl. der Norm $\|\cdot\|_\infty$ auf V ist und berechnen Sie $D\alpha(f)(h)$ für $f \in U$ und $h \in V$.

   Hinweis. Die Offenheit von U muss nicht gezeigt werden.