

**2. Klausur zu Analysis II**  
**im Studiengang 2-Fach-Bachelor Mathematik**

**08. Oktober 2012**

Für die Bearbeitung der folgenden 6 Aufgaben werden bei vollständig richtiger Bearbeitung jeweils 10 Punkte vergeben. Wer insgesamt 24 Punkte erreicht, hat die Klausur bestanden.

Jede Aufgabe ist auf einem separaten Blatt zu bearbeiten. Jedes Blatt ist mit Matrikelnummer und Namen zu versehen.

Viel Erfolg!

Bearbeitungszeit: 2 Stunden

1. Wie lautet

- (a) die Definition der Metrik?
- (b) die Cauchy-Schwarz-Ungleichung?
- (c) die Definition der Richtungsableitung?

2. Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \ln(1 + e^x)$ . Berechnen Sie das Taylorpolynom  $T_2(x, f, 0)$  und zeigen Sie, dass für das Restglied  $R_2(x) = R_2(x, f, 0)$  für  $x \in (0, \ln 2]$  die Abschätzung

$$|R_2(x)| \leq \frac{1}{24} x^3$$

gilt.

3. (a) Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^1 \ln(1 + x^2) dx.$$

(b) Untersuchen Sie das uneigentliche Integral

$$\int_0^1 \frac{\arcsin(e^{-x})}{\sqrt{x}} dx$$

auf Konvergenz.

4. Berechnen Sie die Fourierreihe der  $2\pi$ -periodischen Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \left| \cos\left(\frac{x}{2}\right) \right|$  und untersuchen Sie die Reihe auch auf Konvergenz.

**Hinweis.** Sie dürfen ohne Beweis benutzen, dass die zu den Termen  $\sin(kx)$  gehörigen Koeffizienten  $b_k(f)$  verschwinden, d.h., es gilt  $b_k(f) = 0$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ .

5. Sei  $M$  zusammenhängender metrischer Raum und sei  $X$  nichtleere Teilmenge von  $M$ . Es gelte  $\partial X = \emptyset$ . Zeigen Sie, dass  $X = M$  gilt.

6. Berechnen Sie die lokalen Extrema der Funktion  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(x, y) = 10 \arctan(x + y) - 2x - y^2.$$